

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN TORNO A LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Specialised Knowledge of the Mathematics Teacher about the Exponential Function

Meléndez, J^a; Grueso, R^b

^a Universidad del valle; ^b Universidad del valle

Temática: MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen.

Esta propuesta es un reporte parcial de una investigación en curso, que pretende caracterizar el conocimiento especializado que se pone en juego por parte de un profesor de matemáticas de grado 9º en torno a la función exponencial. En este orden ideas, se presenta la sensibilidad teórica, producto de la revisión literaria y documentación de los distintos referentes conceptuales relacionados con la función exponencial, que predeterminan unas interrelaciones entre las categorías de algunos subdominios del modelo MTSK, que propone Carrillo, Climent y Muñoz (2014); y que a la postre, servirán de referencia para el análisis, cuando en otro momento se lleve a cabo la observación y recolección de datos aportados por el profesor informante.

Palabras clave. Función exponencial, MTSK, Conocimiento del profesor, Potencias

Abstract.

This proposal is a partial report of a research in progress, which aims to characterise the specialised knowledge that is put into play by a 9th grade mathematics teacher in relation to the exponential function. In this order of ideas, the theoretical sensitivity is presented, product of the literature review and documentation of the different conceptual references related to the exponential function, which predetermine some interrelationships between the categories of some subdomains of the MTSK model, proposed by Carrillo, Climent and Muñoz (2014); and that in the end, will serve as a reference for the analysis, when at another time the observation and data collection provided by the informant teacher is carried out.

Keywords. Exponential function, MTSK, Teacher's knowledge, Powers

INTRODUCCIÓN

La función exponencial es un concepto matemático importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, estudios como los de López & Sosa (2008), Vargas (2012) y García & Reaño (2018) muestran que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de este concepto; y Espinoza (2020) hace referencia a que algunas de esas dificultades son consecuencia del conocimiento de lo que el docente pretende enseñar, ya que sus conocimientos son los que le dan forma a la enseñanza que conduce. Y no es solamente tener en cuenta los conocimientos disciplinares del docente, pues, como menciona González y Eudave (2018) el conocimiento disciplinar o matemático no es suficiente para asegurar la competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos relacionados con lo didáctico, como: formas de organizar su enseñanza, el cómo se da el aprendizaje, los errores y dificultades de los estudiantes, entre otros. A su vez, Ponciano & Sosa (2018) hacen referencia a que es importante atender al conocimiento del profesor ya que permite comprender los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, también, como señalan Ponciano y Sosa (2018), apoyaría la formación inicial y continua de profesores, pues permitiría tener mayores elementos para reflexionar sobre su práctica. Además, Vargas (2012) y Velásquez (2014) mencionan que los profesores al enseñar la función exponencial, descuidan algunos aspectos del concepto. Igualmente, Espinoza (2020) sostiene que los profesores suelen tener concepciones erradas sobre el concepto de variable y muestran dificultades sobre las representaciones, privilegiando la algebraica.

Lo anterior muestra una problemática alrededor del conocimiento que se pone en juego por parte del profesor de matemáticas en torno a la función exponencial. Por ello se recurre al modelo MTSK propuesto por Carrillo et al. (2014) de manera que permite estudiar cuáles son esos conocimientos que podría tener, cómo se organizan y cómo se configuran para ejercer su práctica, a través de unos subdominios que hacen referencia a aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinados momentos educativos. De esta manera, para analizar la gestión del profesor a través de lo que él como informante manifieste en su práctica, es importante no desconocer lo que la literatura menciona sobre la función exponencial, de tal manera que se puedan predeterminar algunas categorías que sirvan para ampliar el análisis en torno al conocimiento especializado del profesor.

MARCO TEÓRICO

A continuación, se presenta el modelo MTSK y referentes conceptuales asociados al objeto matemático en el marco de algunos subdominios de dicho modelo: Conocimiento de los Temas (KoT); Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM); Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las matemáticas (KMLS). El objetivo de esta investigación ha llevado a pensar en la forma efectiva de cómo debemos estudiar el conocimiento del profesor, asociándolo a lo que generalmente se conoce como el conocimiento profesional del profesor. Dicho conocimiento, es el que posee un profesor como consecuencia no solo de su formación inicial, sino también de su formación continua y su experiencia. En este sentido, se han considerado algunos modelos que permiten saber qué conoce el profesor, como el modelo Shulman (1986) y el de Ball (2000), modelos que proponen comprender la naturaleza del conocimiento de los profesores y que anteceden al modelo MTSK.

Modelo MTSK

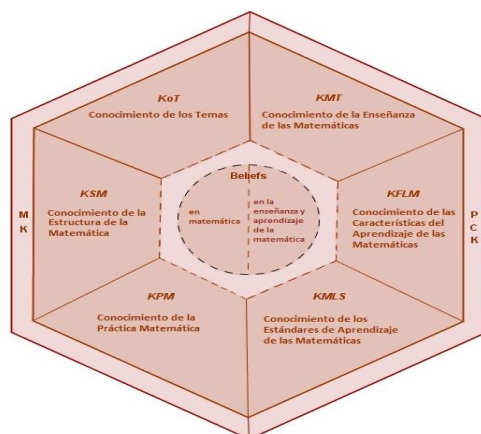


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo, et al., 2014)

En el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), se entiende conocimiento especializado como la información relacionada con contenidos matemáticos y los aspectos didácticos de ese contenido, adquirida por el docente. Asimismo, como esos hechos que los docentes adquieren y que han surgido en la práctica, llevando al profesor a reflexionar al respecto, entendiendo práctica como todas las intervenciones que realiza el docente y no solamente lo que transcurre en el aula. En otras palabras, sería la integración de tres grandes aspectos vinculados en la enseñanza de las matemáticas, lo que el docente conoce de la matemática, de la didáctica del contenido de la matemática y en el ejercicio de enseñar. Así que toda la información o hechos que el docente adquiere le permiten comprender y comunicar el proceso de la enseñanza matemática y todo lo que este implica. También, se hace referencia a que este modelo es una herramienta teórica y

analítica, al clasificar aquellos elementos del conocimiento del profesor de matemáticas y ofrecer herramientas metodológicas para analizar su práctica a través de unos subdominios. Dentro del Conocimiento Matemático (MK) hay tres subdominios; KoT, KSM y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM); y dentro del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) también hay tres subdominios; el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), KFLM y KMLS. También puede observarse las creencias de las matemáticas y de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En cada subdominio existen unas categorías que permiten precisar sobre lo que debería conocer el docente.

Referentes conceptuales asociados a la función exponencial en cada subdominio

Para abordar la función exponencial se hará énfasis en los subdominios mencionados.

Conocimiento de los temas (KoT): Este conocimiento refiere a lo que necesita conocer el docente en relación a los contenidos que enseña, de manera fundamentada y teniendo un nivel de profundización mayor al que se espera del estudiante (Carrillo et al., 2014). En este caso, el contenido o tema es la función exponencial, por ejemplo, una de las categorías de este subdominio es la *fenomenología*, haciendo alusión a los conocimientos acerca de modelos atribuibles, pues a la función exponencial se le atribuye modelar fenómenos de crecimiento y decrecimiento poblacional, referido este al nacimiento o defunción, ya sea bacterias, plantas, virus, personas, entre otras. También juega un papel importante en una inversión que crece a una tasa proporcional a su monto, es decir, el interés compuesto de los intereses producidos por un capital (Leithold, 1994).

Otra categoría es *definiciones, propiedades y sus fundamentos*, el profesor debería conocer la definición de exponente (a^x ; a =base y x =exponente) por ejemplo, que está indicado como superíndice de la base y significa cuántas veces se multiplica la base por sí misma, esta operación se denomina potencia. También, debería conocer las propiedades y operaciones entre potencias y las implicaciones de exponentes negativos, racionales, cero, uno, entre otros. Y la definición de función exponencial, como aquella que en su expresión tiene la variable x como el exponente y según Stewart (2010) es una función de la forma $f(x)=a^x$ donde a es una constante positiva y la variable puede tomar cualquier valor de los reales, y $f(x)$ tiene sentido en los reales positivos. Los *registros de representación* harían parte de la otra categoría, pues el profesor debe conocer distintas formas de representar la función exponencial, representación gráfica, tabular, algebraica y verbal. Finalmente, la categoría de *procedimientos*, por ejemplo, los conocimientos en relación a los parámetros de la función exponencial, es decir, la incidencia que tienen los diferentes valores que se dan en la representación algebraica ($f(x)=k a^{x-c} + b$) en la representación gráfica, en este sentido el valor de c representa un desplazamiento lateral, el valor de b representan un desplazamiento vertical y los valores de k y de a representan si la función es creciente o decreciente, o sea, si $k>0$ y si $0<a<1$, la función decrece, tiene una asíntota cuando x tiende a infinito y es cóncava hacia arriba. Mientras que si $a>1$, la función crece, tiene una asíntota cuando x tiende a menos infinito y también es cóncava hacia arriba. En caso de que $k<0$ las condiciones de monotonía se intercambian.

Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM): Este subdominio engloba conocimientos de conexiones interconceptuales y conocimientos avanzados y elementales respecto al contenido que se atiende, es decir, el docente debe de contar con conocimientos de las relaciones entre la función exponencial y otros contenidos, ya sean contenidos necesarios para conocer este concepto o contenidos anteriores o posteriores, con el fin de poder tener una mirada más amplia y avanzada de su comportamiento.

Ahora, una forma de conocer la función exponencial es a través de su desarrollo histórico epistemológico, pues es el que aporta elementos que permiten la consolidación como

objeto matemático. Así que, para cada categoría de este subdominio se tendrán en cuenta aspectos del desarrollo histórico epistemológico, ya que, en diferentes periodos de la historia se han identificando las principales concepciones y usos que se le atribuyen a este concepto hasta lo que se considera actualmente, por ejemplo, cuando se habla de la *Conexión de simplificación* se haría referencia a los conocimientos de la relación que hay entre la función exponencial y los objetos matemáticos que emergen antes de este. El momento en que emergen algunos conceptos antes de la consolidación de la función exponencial es en la edad antigua, pues existe evidencia que muestra que los Babilónicos, los egipcios y los griegos trabajaron la noción de progresión geométrica (Cambronero, 1999). Pero también, se le atribuye a los Babilónicos el nacimiento del concepto de potencia relacionado con la geometría, particularmente las relaciones con el concepto de área ($n \times n$) y volumen ($n \times n \times n$) (Vargas, 2012). Otro aporte, en esta época es la idea de órdenes y periodos de números, usando aquí representaciones numéricas para abreviar cantidades muy grandes (Arquímedes, 287-212 a.C) (Méndez, 1897). Finalmente, en este periodo hay aportes en relación al desarrollo del cálculo de potencias con exponentes enteros y racionales por parte de Oresme (1320-1382). En la edad moderna, en el año 1638 Descartes (1596-1650) en su obra *La Geometría* muestra un punto de inflexión al trabajo que se venía realizando, ya que las nociones de área y volumen las mostró como segmentos, además utilizó los exponentes enteros positivos escritos como súper índices (la notación n^3 para expresar $n \times n \times n$) e implantó el uso de x y y como variables y a , b y c como constantes. Un siglo después, Chuquet (1445-1500), retoma el aporte realizado por Oresme y empieza a ampliar más lo relacionado al trabajo con exponentes, realiza acercamientos importantes a los exponentes representados por números enteros y exponentes racionales. Pero es Stifel (1487-1556) es quien introduce el término exponente, este aporte se evidencia en su obra *Arithmetica Integra* (1544) en la que asocia una progresión aritmética a una geométrica (Vargas, 2012). Después de este momento, Stifel, Napier y Burgi completan este trabajo con exponentes y queda constituida la ecuación de función exponencial. Luego, Stifel en su obra *Arithmetica Integra* (1544) introduce los exponentes racionales arbitrarios, establece el término exponente y explica la asociación entre la progresión geométrica y aritmética para los exponentes negativos y fraccionarios para resolver ecuaciones. Finalmente, Napier y Burgi, entre 1614 y 1620, realizan el paso a exponentes reales de manera intuitiva, siendo este un acercamiento de cómo se concluye el concepto de función exponencial.

En cuanto a *las Conexiones de complejización*, se hace referencia a los conocimientos de la relación que hay entre la función exponencial y los objetos matemáticos que emergen posterior a esta. En este caso, algunos aspectos histórico-epistemológicos en el desarrollo del cálculo permiten identificar propiedades asociadas a la derivada y a la anti derivada.

Los contenidos anteriores son una proyección para trabajar la función exponencial, que la función exponencial es una proyección para los contenidos posteriores y que en este fragmento en el que se ha intentado mostrar el desarrollo histórico epistemológico del concepto de función exponencial podemos evidenciar otra categoría que sería las *conexiones auxiliares* en este caso la relación de los diferentes contenidos que encontramos, como: exponente, potencia, progresiones, entre otros, ofrecen elementos auxiliares para el tratamiento de la función exponencial. Finalmente, en la categoría de *conexiones de contenidos transversales*, existe una cualidad común entre estos contenidos y es lo que permite que se relacione al contenido a enseñar. Por ejemplo, un contenido transversal de la función exponencial, es lo que tiene que ver con la operación de potenciación, en menor o mayor complejidad y sus diferentes propiedades.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFML): Este subdominio engloba los conocimientos del aprendizaje del contenido matemático por parte del estudiante, su objetivo son los contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje (Carrillo, 2014). Son varias propuestas interesadas en estudiar aspectos concernientes al aprendizaje de la función exponencial, Como las de Díaz (citado de Vargas, 2012); Elstak (citado de Vargas, 2012); Martínez (citado de Vargas, 2012); Vázquez, Méndez y Ferrari (2017); Venosa, Méndez, Trejo y Ferrari (2017) y Trejo y Ferrari (2018) con la intención de que los estudiantes puedan entender el concepto y sus implicaciones en la modelación de situaciones de la vida cotidiana. En estas propuestas, se logran identificar aspectos asociados a cómo el estudiante está entendiendo el concepto y qué de ello podría aprovecharse para la enseñanza del mismo. Para ello, el docente debería conocer lo concerniente a cuatro categorías: las *formas de aprendizaje*, es decir, los conocimientos que tiene el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión, asociados a la misma naturaleza de los contenidos matemáticos. Por ejemplo, Vargas (2012) muestra aspectos relacionados con la función exponencial y la teoría APOS propuesta por Dubinsky (2000), la cual permite evidenciar la construcción mental del estudiante cuando se enfrenta a una tarea de aprendizaje de este objeto matemático.

La categoría *fortalezas y dificultades* que engloba los conocimientos de los errores, obstáculos y dificultades asociados al aprendizaje de las matemáticas. En este caso, Vargas (2012) muestra diferentes dificultades de los estudiantes al abordar este concepto, asociadas al significado de exponente, ya que se espera que para el estudio de la función exponencial los estudiantes reconozcan la relación entre exponentes negativos y positivos y que tengan argumentos para explicar lo que sucede cuando el exponente es cero o uno.

Entre las dificultades, Elstak (citado de Vargas, 2012) menciona que los estudiantes no encuentran relación entre las diferentes definiciones que hay para los exponentes (cuando en a^x se dan los siguientes casos $x=n$, $x=1$, $x=0$, $x=-n$ y $x=p/q$) o sea, que la definición usual de exponente está asociada a un entero positivo y esta definición ocasiona obstáculos en el estudiante cuando pretende resolver potencias cuyos exponentes son negativos o racionales. Así que se hace necesario que a los estudiantes se les proporcione un concepto general de exponente que puedan aplicarlo en los diferentes casos, para ello realizan una propuesta didáctica que gira en torno a la razón de cambio. En este estudio, también fue posible observar lo referido a la tercer categoría *formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático* del subdominio en cuestión, que hace referencia a los conocimientos del profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, por ejemplo, es posible evidenciar algunas afirmaciones de los estudiantes, como: $2^0=0$, $2^0=2$, $2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$ y $2^{-3}=8$ y se le agrega el signo negativo, entre otras afirmaciones.

Finalmente, tenemos la categoría de *concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas* englobando los conocimientos sobre las expectativas e intereses respecto a las matemáticas. Algunos de estos aspectos tienen que ver con la utilidad que los estudiantes le puedan dar o no a este tipo de modelos exponenciales y es que la mayoría de aplicaciones están enfocadas en ciencias específicas, como: la economía, la administración, la ingeniería, las ciencias naturales, otras, y no hacen parte del contexto del estudiante lo que podría indicar no hace parte de sus intereses.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): Este subdominio engloba el conocimiento del profesor acerca de lo que está estipulado que aprenda un estudiante y el nivel conceptual con el que se espera que aprenda en un determinado momento escolar. La fuente de esta información es obtenida de lo estipulado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), La primera categoría alude a los *conocimientos de los contenidos matemáticos que se requieren enseñar en un grado*, en

el caso de la función exponencial, según el MEN (2006) se enseña en grado octavo y noveno de la Secundaria. La otra categoría hace alusión a *los conocimientos del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado*, que, en el contexto colombiano, puede asociarse al desarrollo de competencias en los estudiantes, llamados Estándares básicos de competencias, entre ellos se pueden destacar los siguientes:

Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas (MEN, 2006 p. 49-50).

Asimismo, se tienen en cuenta los DBA (MEN, 2016) enunciando unos aprendizajes correspondientes al trabajo con la función exponencial:

Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.). Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones. (p. 65-66).

Por último, la categoría del *conocimiento de la secuenciación de diversos temas*, la cual se relaciona con lo estipulado por el MEN (2006) quien vincula la función exponencial como uno de los aspectos que aportan al desarrollo de pensamiento variacional, señalando que la enseñanza y aprendizaje de dicho concepto no solo debe trabajar ese pensamiento, sino también los otros pensamientos (numérico, espacial, métrico y aleatorio), posibilitando así el trabajo con diferentes temas (coherencia horizontal). Además, menciona que es necesario que haya una coherencia entre los temas enseñados en los diferentes grados de escolaridad de tal manera que para desarrollar pensamiento variacional se le haya proporcionado al estudiante espacios en los que trabaje en el sistema analítico y algebraico desde los primeros años de escolaridad y de manera paulatina el estudiante vaya adquiriendo mayores habilidades para responder a situaciones que requieran de este pensamiento (coherencia vertical). De acuerdo con la coherencia vertical que propone el MEN (2006), el orden de los temas alrededor de la función exponencial es: multiplicación, secuencias, patrones de regularidad, potenciación, función exponencial y su función derivada (Razón de cambio instantáneo).

METODOLOGÍA

Esta propuesta se inscribe en un enfoque cualitativo y como estrategia metodológica la revisión documental (Camargo, 2018), pues se toma información de lo que se encuentra en la literatura en relación con el concepto de función exponencial filtrando dicha información de acuerdo con las categorías que sugieren algunos referentes dentro de cada subdominio del modelo MTSK. En este sentido, en un primer momento se realizó una búsqueda y selección de documentos bajo los criterios antes mencionados, y una vez se recolectó lo concerniente a la sensibilidad teórica de la función exponencial, en un análisis preliminar, se establecen algunas interrelaciones entre los subdominios a partir de los vínculos encontrados entre datos dentro de cada categoría de subdominios distintos.

ALGUNAS INTERRELACIONES ENTRE LOS SUBDOMINIOS

Como consecuencia del marco teórico, se involucran varios conocimientos cuando se hace referencia a la relación de la función exponencial con otros temas, por ejemplo, en el KoT se estaría relacionando la función exponencial con las propiedades de la potenciación; en el KSM hay relaciones desde el punto de vista matemático ya que en el

desarrollo histórico epistemológico de la función exponencial hubo un trabajo previo en relación con las potencias, las progresiones, los exponentes, nociones de área y volumen, entre otros; igual en lo que corresponde al KFML en cuanto a las dificultades por parte de los estudiantes en lo que se refiere al exponente y la operación de potenciación y también las dificultades en relación al uso de modelos exponenciales en la vida cotidiana; y finalmente; desde el KMLS, lo referido a la coherencia vertical en cuanto a la propuesta del orden de los temas alrededor de la función exponencial, como: secuencias, patrones de regularidad. En este primer grupo de interrelaciones entre los diferentes subdominios que se logra evidenciar que las potencias son un aspecto de gran influencia.

En cuanto al uso de modelos exponenciales en la vida cotidiana, desde el KoT, se hace referencia a los conocimientos acerca de modelos atribuibles a la función exponencial como: fenómenos de crecimiento y decrecimiento poblacional y el interés compuesto; desde el KSM se alude a lo que menciona la historia acerca de estos modelos, por ejemplo el acercamiento que hace Bernoulli al mostrar el límite para designar el número e , para hablar de impuestos a partir de la matemática aplicada a la economía (Vargas, 2012). Desde el KFML, se alude a la dificultad asociada a la utilidad de este concepto en la vida cotidiana; finalmente, desde el KMLS, el MEN (2006) propone unos contextos para la enseñanza, por ejemplo, el de las otras ciencias y el de la vida cotidiana.

Respecto a los registros de representación, las interrelaciones en los cuatro subdominios son: en el KoT, se deben conocer los cuatro registros de representación (gráfica, tabular, algebraica y verbal). En el KSM, la notación científica como consecuencia del trabajo con las representaciones simbólicas y las representaciones de las curvas con el estudio del Cálculo. En el KFML, las dificultades asociadas a la conversión de registros (simbólico, gráfico, verbal y tabular) y la necesidad de atender al uso por lo menos de dos registros de representación (Duval, 2004). En el KMLS, el MEN (2006) resalta la importancia del trabajo en diferentes contextos y registros de representación, en torno al estudio del cambio.

ALGUNAS REFLEXIONES PRELIMINARES DEL ESTUDIO

A pesar de que el modelo MTSK es fundamental en la observación en el aula, este estudio parcial muestra que, para hacer el análisis de dicha observación, es importante que el investigador sistematice y predetermine unas posibles categorías o aspectos como consecuencia de una adecuada sensibilidad teórica. En este caso, los aspectos fueron: relación de la función exponencial con otros temas, potencia, uso de modelos exponenciales en la vida cotidiana y registros de representación, a los que se les puede asociar a diferentes categorías de los subdominios seleccionados. Estas interrelaciones encontradas se convierten en posibles directrices que permitan hallazgos y análisis de episodios de clase, así como también, sugerencias para orientar algunas entrevistas al profesor informante. Un ejemplo particular podría ser la atención predeterminada en torno a las dificultades de los estudiantes (KFML) y buscar elementos claves de los episodios que den cuenta de qué tipo de conocimiento refleja el profesor para realimentar a los estudiantes o evitar que, como consecuencia, estos cometan algunos errores. Poniéndose de manifiesto, que en tal situación habría que apelar posiblemente a elementos del episodio que aludan a otros subdominios como (KoT, KSM, KMLS), en procura de caracterizar de una manera más completa cómo se estructura, cómo se organiza y cómo se relacionan los conocimientos que se ponen en juego por parte del profesor. Finalmente, determinar estas interrelaciones aportaría al filtro sobre *artefactos* (Planeaciones, pruebas escritas) que sean susceptibles de ser analizados.

Referencias

- Ball, D. (2000). Bridging Practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 241-247.
- Camargo, L. (2018). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. *Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Pedagógica Nacional, en evaluación.*
- Cambronero, S. (1999). *Una Construcción Elemental de las Funciones Exponencial y Logarítmica*. Costa Rica. Recuperado el 22 de junio de 2015, en: <http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Contribucionesv3n1002/funcionexponen>.
- Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero, D., Flores, E., & Montes, M. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Peter Lang: (Segunda edición). (M. V. Restrepo, Trad.)
- Espinoza, G. (2020). *Caracterización Del conocimiento especializado del profesor de matemáticas De educación media sobre el concepto de función*. Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- García, L. E., & Reaño, C. R. (2018). Un estudio sobre cómo se manifiesta la capacidad para crear problemas sobre la función exponencial en docentes de educación superior. *Rev. Prod. Disc. Educ. Matem*, 14-25.
- González, J., & Eudave, D. (2018). Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de profesores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 25-45.
- Gutiérrez, C., Méndez, M., Trejo, M., & Ferrari, M. (2017). Caracterizando la Función Exponencial Mediante la Covariación. *Tlamati Sabiduría*, 22-33.
- Méndez, E. (1897). *El Arenario*. Obtenido de http://biblioteca-digital.ilce.edu.mx/Colecciones/ReinaCiencias/_docs/El_arenario-Arquimedes.pdf
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje v.2*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ponciano, E., & Sosa, L. (2018). Reflexión sobre el conocimiento del profesor. El caso de la enseñanza de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, 83-97.
- López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades Conceptuales y Procedimentales en el Aprendizaje de Funciones en Estudiantes de Bachillerato. *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, 308-318.
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 4-14
- Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable, conceptos y contextos 4ed*. México: Cengage learning.
- Vargas, J. (2012). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. España: Universidad de Salamanca.
- Velasquez, F. (2014). *Creencias y una aproximación de la concepción de un profesor de precálculo sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial*. Perú: Pontificia Universidad católica de Perú.
- Vásquez, Y., Méndez, M., & Ferrari, M. (2017). Acercamiento a la función exponencial desde un escenario de modelación y covariación. *Tlamati Sabiduría*, 42-54.