MÉTODO DE LA INVERSA: EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA PROFESORA UNIVERSITARIA

INVERSE METHOD: THE SPECIALIZED KNOWLEDGE OF A UNIVERSITY PROFESSOR

Regolini, M. [a]; Climent, N. [b]

[a] Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina; [b] Universidad de Huelva, España

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen. Esta investigación pretende contribuir al conocimiento especializado del profesor universitario de Álgebra Lineal. Se desarrolla un estudio de caso instrumental y mediante el MTSK se analizan episodios de una clase correspondiente al método de la inversa. El objetivo es describir relaciones entre los subdominios *Conocimiento de los temas*, *Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* y *Conocimiento de la enseñanza de la matemática que sustenta la práctica de una profesora*. La variedad de ejemplos que aborda pone de relieve su conocimiento del contenido matemático ligado tanto a su conocimiento sobre la enseñanza como al conocimiento de los errores que habitualmente cometen los estudiantes y las dificultades que se les presentan.

Palabras clave. MTSK, Álgebra lineal, Docente auxiliar, Universidad, Método de la inversa.

Abstract. This research aims to contribute to the specialized knowledge of the university professor of Linear Algebra. An instrumental case study is developed and are analyzed through the MTSK episodes of a class corresponding to the inverse method are analyzed. The objective is to describe relationships between the subdomains *Knowledge of mathematical topics*, *Knowledge of Features of Learning Mathematics* and *Knowledge of Mathematics Teaching*. The variety of examples that she addresses highlights her knowledge of mathematical content linked both to her knowledge of teaching and to her knowledge of the mistakes that students habitually make and the difficulties they face.

Keywords. MTSK, Linear algebra, Teaching assistant, University, Inverse method.

INTRODUCCIÓN

Diversos investigadores han focalizado sus estudios en el conocimiento del profesor (entre ellos, Shulman, 1986; Ball, Thames y Phelps, 2008; Godino, 2009; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz–Catalán, 2013) dirigiendo la mirada sobre aspectos particulares con la intención de comprenderlo. Esto ha originado una amplia variedad de perspectivas sobre el conocimiento del profesor de matemática, de las cuales, en este artículo, se aborda la correspondiente al Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK [1], Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz–Catalán, 2013).

Algunas investigaciones recientes que tienen al modelo MTSK por marco de referencia están centradas en relaciones específicas entre los diferentes subdominios (Zakaryan et al., 2018; Vasco-Mora y Climent, 2021). Esto es factible dada la impronta del modelo MTSK, como herramienta analítica, que permite examinar con detenimiento el conocimiento del profesor de matemática, el cual está conformado por una compleja red de relaciones (Carrillo et al., 2018). Por ejemplo, Zakaryan et al. (2018) han profundizado en relaciones entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y

1 Sus siglas en inglés Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge.

el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas de una profesora de secundaria en el contenido de semejanza de triángulos.

Este artículo tiene un doble propósito, contribuir al modelo MTSK e identificar relaciones entre elementos de conocimiento matemático especializado del profesor universitario. Para ello, nos planteamos como objetivo describir relaciones entre el conocimiento de una profesora sobre la enseñanza de la matemática, el conocimiento de las características de su aprendizaje y el conocimiento de los temas, cuando aborda la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales a través del método de la inversa.

La importancia de analizar el conocimiento de un profesor sobre la enseñanza de un contenido determinado posibilita comprender, entre otros, cómo escoge los ejemplos –que le permitirán destacar aspectos relevantes del tema, considerando las limitaciones u obstáculos que pudieran surgir–, las estrategias y los recursos didácticos que utiliza para mejorar la enseñanza y no su mero uso. Pero, estudiarlo, de manera conjunta, con el conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas contribuye a comprender cómo el profesor interpreta las producciones de sus estudiantes, identifica y anticipa los errores habituales, aprovechando las fortalezas y dificultades en el aprendizaje de los tópicos (Carrillo et al., 2018).

ASPECTOS TEÓRICOS

El MTSK es un modelo teórico que permite estudiar el conocimiento que posee el profesor de matemáticas, considerando lo que tiene de específico ese conocimiento sobre la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje. Dos de sus tres dominios se refieren al *Conocimiento*, diferenciados entre *Matemático* (MK[2]) y *Didáctico del Contenido* (PCK) y, el tercero comprende las *Creencias sobre las Matemáticas y sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas*, situado en el centro del modelo, al considerar que son las que permean los dominios de conocimiento. (Figura 1)

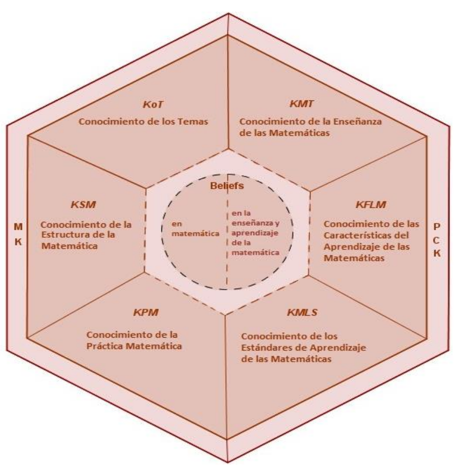

Figura 1. Modelo MTSK

En el MK se distinguen los subdominios *Conocimiento de los Temas* (KoT), *Conocimiento de la Estructura de la Matemática* (KSM) y *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM). El PCK está formado por los subdominios *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT), *Conocimiento de las Características del*

2 Corresponde a sus siglas en inglés. A lo largo del documento, se utilizará esta forma en otras expresiones similares, salvo que se indique lo contrario.

Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS) (Carrillo et al., 2018).

Este artículo está focalizado en los subdominios *Conocimiento de los Temas*, *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* y *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas*, por lo que se ejemplifican alguna de sus categorías luego de presentar una breve descripción de los mismos.

El **KoT** abarca el conocimiento del profesor sobre los conceptos matemáticos y los procedimientos con fundamentación teórica, las diversas maneras de representación del contenido y los fenómenos atribuibles a un tema. Por ejemplo, el profesor sabe que, si una matriz cuadrada posee inversa entonces es única (dentro de la categoría *Definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

El **KMT** se refiere al conocimiento que posee el profesor sobre la matemática asociado a la enseñanza. Entre otros, el profesor conoce que para que los estudiantes distingan cuándo la solución de un sistema de ecuaciones lineales podrá ser obtenida por la regla de Cramer, deberá utilizar diversos ejemplos. Entre ellos, sistemas lineales cuadrados –con al menos uno cuya matriz de coeficientes tenga determinante igual a cero– y rectangulares (correspondiente a la categoría *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*) (Regolini y Climent, 2021).

El **KFLM** alude al conocimiento del profesor sobre la matemática como objeto de aprendizaje. Particularmente, el profesor sabe que los estudiantes para calcular el determinante de una matriz de orden 3x3 prefieren emplear la regla de Sarrus a cualquier otro método (referido a la categoría *Formas de interacción con un contenido matemático*) (Regolini y Climent, 2021).

METODOLOGÍA

La investigación, desarrollada bajo un diseño de estudio de caso instrumental (Stake, 2007), es de tipo cualitativa e interpretativa (Lincoln y Guba, 1985) ya que persigue la comprensión del conocimiento especializado de una profesora que dicta clases en una Facultad de Ciencias Económicas en Argentina. Al momento del estudio Josefina –seudónimo–, Licenciada en Administración de Empresas, contaba con siete años de experiencia en la enseñanza del Álgebra Lineal. La profesora ha sido seleccionada por su buena predisposición para cooperar en la investigación y ser integrante del equipo docente donde la primera autora de este trabajo cumple el rol de profesora responsable.

La principal fuente de datos proviene de las clases grabadas en vídeo, utilizando el método de observación no participante (Cohen y Marrion, 2002) que se complementan con entrevistas semiestructuradas y el diario de clase de Josefina. Para esta comunicación, todos los datos se refieren a la resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales a través del método de la Inversa.

La información recogida ha sido transcripta, dividida en unidades y estudiada a través de un análisis de contenido (Bardin y Suárez, 1996), considerando las definiciones de los diferentes subdominios y categorías del modelo MTSK. Esto ha permitido estudiar el conocimiento de la profesora cuando aborda la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de la inversa. De las transcripciones se han seleccionado episodios que ofrecen indicios o evidencias en la acción y declaración de la profesora que aluden a diferentes tipos de conocimiento identificados, principalmente, en los subdominios KoT, KFLM y KMT y la relación entre éstos.

RESULTADOS

Los episodios seleccionados para este trabajo, dan cuenta de la manera en que Josefina enseña a resolver sistemas de ecuaciones lineales.

La profesora sabe que algunos sistemas cuadrados podrían ser resueltos empleando la inversa de la matriz de coeficientes y que, para ello, necesitará emplear contenidos ya abordados (rango máximo, métodos para calcular la inversa, cómo se realiza el producto matricial, entre otros). Por su experiencia en la materia, conoce que este método suele ocasionar algunas dificultades a sus estudiantes.

Antes de comenzar a enseñar el procedimiento propiamente dicho, la profesora busca que los estudiantes presten especial atención a las condiciones establecidas en el enunciado del método de la inversa, apoyándose en su conocimiento sobre dificultades que advierte en los estudiantes referidas a la forma en que se vinculan con el contenido matemático y, a las que hace referencia tanto en su diario de clase [*"que el estudiante previo a aplicar el método de resolución, analice las condiciones del mismo"*] como en una entrevista [*"una dificultad que se suele hacer presente es intentar calcular la inversa de la matriz de coeficientes de SEL* –abreviatura que utiliza para referirse a los sistemas de ecuaciones lineales– *cuadrados pero sin tener la precaución de analizar si la matriz posee inversa"*] (KFLM–*Fortalezas y dificultades*).

Después de leer la consigna *"En caso de que sea posible, resuelva los sistemas de ecuaciones lineales [...] empleando la matriz inversa de la matriz de coeficientes y que justifique la respuesta"* y la sugerencia *"calcular la inversa aplicando cada uno de los métodos estudiados a fin de obtener mayor desenvolvimiento con ellos"* Josefina pregunta a sus estudiantes sobre *"¿qué cuestiones deberíamos analizar?"* intentando establecer, de manera general, que el sistema tiene que ser cuadrado y su matriz de coeficientes invertible, dando muestras de su conocimiento sobre ¿Cuándo se puede hacer? (KoT–*Procedimientos*), que reafirma indicando que este método no será empleado en sistemas de ecuaciones lineales rectangulares como tampoco, en aquellos cuya matriz de coeficientes cuadrada no posea inversa (KoT–*Definiciones, propiedades y sus fundamentos*) (**Unidad 1**).

J[3] : ¿Qué sistemas tengo que descartar desde un comienzo?

As: Los rectangulares.

J: ¿Por qué?

A: Porque no se les va a poder calcular la inversa a la matriz de coeficientes, no todas tienen inversa.

J: Porque las únicas matrices que tienen chance de tener inversa son las cuadradas o sea que a los sistemas rectangulares los vamos a descartar. Y ¿qué otra cosa? ¿Todos los sistemas cuadrados los voy a poder resolver por el método de la inversa?

As: No.

A: No, los compatibles determinados, los que tengan determinante distinto de cero.

J: En realidad, que su determinante sea distinto de cero, pero tiene que ver con que exista la inversa de la matriz de coeficientes. (**Unidad 1**)

[3] J se refiere a Josefina, A alude a un alumno (aunque se trate de diferentes alumnos) y As indica varios alumnos.

En la Unidad anterior, hay indicios de que la profesora es capaz de apreciar imprecisiones en las argumentaciones de sus alumnos. Por ejemplo, la expresión del estudiante *"Porque no se les va a poder calcular la inversa a la matriz de coeficientes, no todas tienen inversa"* se puede interpretar como que algunas matrices rectangulares podrían tener inversa cuando, en realidad, esto nunca sucede (KFLM–*Fortalezas y Dificultades*).

Josefina, mientras dialoga con la clase, expresa el sistema de ecuaciones lineales mediante una ecuación matricial, especificando que es cuadrado. Supone la existencia de la inversa de la matriz de coeficientes y expresa la solución a través de un producto matricial (KoT–*Registros de representación*) ofreciendo indicios de que conoce ¿Por qué se hace así? y ¿Cómo se hace?) (ambos KoT– *Procedimientos*) y (KoT– *Registros de representación*). (**Unidad 2**).

J: Entonces si nosotros tenemos un sistema de ecuaciones lineales cuadrado

$A \,.\, X = B$ cuadrado ✓

J: Y vamos a decir, si existe la matriz inversa de la matriz de coeficientes ¿qué podemos hacer? Podemos plantear que X va a ser igual ¿a qué cosa? A X lo voy a poder expresar ¿cómo? ¿Para qué me sirve la inversa? O me quedo ahí, digo tiene solución y nada más. X ¿a qué va a ser igual?

A: A la inversa de A por B.

J: Bien, a la inversa de A por B.

$X = A^{-1} \,.\, B$

(**Unidad 2**)

El uso de los cuatro sistemas de ecuaciones lineales de la guía de ejercicios revela su KMT (*Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*) ya que con ellos puede exhibir a sus estudiantes las diversas situaciones que se podrían presentar al intentar resolver un sistema empleando el método de la inversa.

Josefina clasifica cada sistema de ecuaciones lineales en rectangular o cuadrado, sin argumentar lo que toma en consideración. No obstante, se advierten indicios de que la profesora conoce que tanto un sistema lineal como su matriz de coeficientes pueden ser cuadrado o rectangular y que, dichas clasificaciones se corresponden entre sí –un sistema cuadrado tiene su matriz de coeficientes cuadrada– (KoT–*Definiciones, propiedades y sus fundamentos*). Estos indicios corresponden a evidencias de su conocimiento en una clase previa, de acuerdo a lo presentado en Regolini y Climent (2021).

En dos ejercicios, Josefina muestra saber que la solución del sistema de ecuaciones lineales –si existiera– no podrá ser obtenida utilizando la inversa de la matriz de coeficientes (KoT–*Procedimientos ¿Cuándo se puede hacer?*). En uno, porque el sistema es rectangular [*"¿Qué pasa con el inciso d? ¿Qué es lo primero que nos llama la atención de este ejercicio? ¿Qué pasa con este sistema de ecuaciones lineales? Es rectangular, ¿Puedo resolverlo por el método de la inversa? No puedo resolverlo por el método de la inversa porque es rectangular*"] y en el otro, porque a pesar de ser un sistema lineal cuadrado, su matriz de coeficientes no es invertible [*"¿Qué pasa con el inciso b? cuya expresión matricial es:* $A_{3x3} \,.\, X_{3x1} = B_{3x1}$ *(...) El sistema de ecuaciones lineales es cuadrado, pero sólo con esto no me alcanza. ¿Qué tengo que analizar? Si existe o no inversa. En este caso, optamos por el camino del rango porque ya lo teníamos calculado. ¿Qué pasó con el rango de A? ¿A qué era igual? A dos. Entonces*

¿Va a existir la inversa de A? No, porque el rango no es máximo. ¿A este sistema lo puedo resolver por el método de la inversa? No puedo resolverlo porque $\nexists A^{-1}$. *Aquéllos que le calcularon el determinante –se refiere al determinante de A– ¿cuánto les dio? Cero.*][4].

En el párrafo anterior, se advierten indicios de que Josefina sabe que la matriz de coeficientes, de un sistema de ecuaciones lineales cuadrado, será invertible si su rango es máximo o su determinante es distinto de cero (KoT–*Procedimientos: ¿Cuándo se puede hacer?*) y también, indicios de que conoce la relación que existe entre estos valores –que una matriz cuadrada tenga rango máximo es equivalente a que su determinante sea diferente de cero– (ambos, KoT–*Definiciones, Propiedades y sus fundamentos*).

Josefina evidencia conocer que sus alumnos, en muchas situaciones, se pierden en lo que están realizando y no saben si han llegado a la solución (KFLM–*Fortalezas y dificultades*) cuestión que ha sido manifestada por la profesora en una entrevista [*"les recalco cuál es el objetivo (resolver el SEL) para que los ejercicios no queden a la mitad, que no se queden sólo en la resolución de la matriz inversa, sino que la empleen para resolver el SEL"*]. Pero, en la clase, estos indicios se convierten en evidencia (**Unidad 3**).

J: Recién ahí lo que hice es calcular la inversa, ¿el ejercicio terminó?

A: No.

J: No, tengo que resolver el sistema usando la inversa. ¿Qué tengo que plantear ahora para poder resolver el sistema empleando la inversa?

A: El producto matricial.

J: Bien. Vamos a tener X, que era de orden 3x1 es igual a

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

J: Ahora ¿qué hago para llegar a la solución del sistema? O ¿llego hasta ahí?

A: No

J: No, multiplico, lo tengo que resolver. […] entonces me va a quedar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

J: Llego a la solución del sistema de ecuaciones lineales. ¿A qué cosa? Que x es igual a menos seis, y es igual a tres y, z es igual a dos. Porque lo que tengo planteada es una igualdad de matrices. (**Unidad 3**)

En la unidad de información anterior, se evidencia que Josefina sabe que la solución obtenida corresponde a una matriz columna (KoT–*Procedimientos: Característica del*

4 En ambos casos, las expresiones entre corchetes sólo corresponden a la profesora, ya que se han eliminado las intervenciones de los estudiantes.

resultado) y, además, que de la igualdad matricial puede identificar, coloquialmente, el valor de cada una de las variables (KoT–*Definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

CONCLUSIONES

El análisis efectuado ahonda en el conocimiento matemático que sustenta la práctica de una profesora universitaria de Álgebra Lineal, cuando enseña a resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de la inversa, desde la perspectiva del MTSK.

Al igual que en Zakaryan et al. (2018), nos ha permitido indagar acerca de relaciones específicas del conocimiento del profesor sobre la enseñanza y las características del aprendizaje de las matemáticas y en nuestro caso, ligado a su conocimiento de los temas.

En Josefina se advierte que su KoT sobre procedimientos (cuándo, cómo, por qué y características del resultado) parece sustentar su KFLM que se centra en dificultades de los estudiantes, respecto a que suelen no tomar en consideración las condiciones o propiedades del procedimiento, y en su KMT en cuanto a ejemplos cuya variedad pone de relieve qué sistemas de ecuaciones lineales podrán ser resueltos por el método de la inversa y cuáles no, presentando todas las situaciones posibles.

Si bien en una investigación previa, al analizar el conocimiento matemático especializado que evidencia Josefina en una clase correspondiente a la regla de Cramer (Regolini y Climent, 2021), su enseñanza no consideraba hacer explícito el porqué del procedimiento, en esta ocasión sí se hace explícito, quizá porque ese porqué va evidente en el propio procedimiento.

Este estudio contribuye a la identificación sobre relaciones de conocimiento entre los subdominios KoT, KFLM y KMT. Sin embargo, consideramos que las mismas requieren ser profundizadas en próximas investigaciones y, también, con otros métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Con el fin de indagar si emergen relaciones entre otros subdominios del MTSK, aportando así a una mejor comprensión del conocimiento matemático del profesor universitario.

REFERENCIAS

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bardin, L. y Suárez, C. (1996). *Análisis de contenido* (2ª ed.). Akal.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz–Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the VIII CERME (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores–Medrano, E., Escudero–Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar–González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cohen, L y Marrion, L. (2002). *Método de investigación cualitativa*. Madrid: La Muralla.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.

Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills, Ca: Sage Publications.

Regolini, M. C. y Climent Rodríguez, N. (2021). Una mirada a la regla de Cramer desde el conocimiento especializado del profesor universitario. *Revista Tangram*, *4*(02), 2595-0967.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. (4a ed.) Morata.

Vasco-Mora, D. y Climent, N. (2021). The specialised knowledge and beliefs of two University lecturers in linear Algebra. En S. Zehetmeier, D. Potari, y M. Ribeiro (eds.), *Professional Development and Knowledge of Mathematics Teachers* (pp. 104-123).

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 105-123.