EVIDENCIAS DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO QUE SE PRESENTAN DURANTE EL DISEÑO DE ACTIVIDADES BASADAS EN LA TEORÍA APOE

Evidence of specialized knowledge presented during the design of activities based on the APOS theory

Sánchez-García, J.A. [a]; Flores-Medrano, E. [a]; Hernández, L.A. [a]; Juárez-Ruiz, E. [a]

[a] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

Temática: 5 – Extensiones del MTSK

Resumen. En este trabajo se presenta una investigación que utiliza como herramienta metodológica al modelo MTSK. Dicho modelo fue utilizado con el propósito de identificar los conocimientos que dos profesores de matemáticas presentan durante el diseño de actividades. La base teórica que ambos profesores utilizaron para dicho diseño corresponde a la teoría APOE. Se analizaron sus trabajos finales de máster donde se encuentran las secuencias de actividades junto con su descripción, se complementó el análisis con una entrevista y un cuestionario. En las conclusiones se reporta que, al diseñar actividades con base en la teoría APOE se pone en práctica conocimiento correspondiente al MK, teniendo mayor presencia el considerado en el KoT, en contraste, se menciona que, en comparación con el MK, se encontró mayor evidencia de conocimiento enmarcado en el PCK, observando que, además de utilizar a la teoría APOE como teoría de aprendizaje, esta es interpretada también como teoría de enseñanza.

Palabras clave. MTSK, Teoría APOE, Conocimiento especializado, Teorías institucionalizadas.

Abstract. This paper presents an investigation that uses the MTSK model as a methodological tool. This model was used with the purpose of identifying the knowledge that two mathematics teachers present during the design of activities. The theoretical basis that both professors used for this design corresponds to the APOS theory. Their final master's works where the activity sequences are found together with their description were analysed, the analysis was complemented with an interview and a questionnaire. In the conclusions it is reported that, when designing activities based on the APOS theory, knowledge corresponding to MK is put into practice, the one considered in the KoT having a greater presence, in contrast, it is mentioned that, compared to MK, it was found to be greater evidence of knowledge framed in the PCK, observing that, in addition to using APOS theory as learning theory, it is also interpreted as teaching theory.

Keywords. MTSK, APOS theory, Specialized knowledge, Institutionalized theories

INTRODUCCIÓN

Un interés que se tiene en relación con el conocimiento especializado de matemáticas corresponde al conocimiento que se requiere para abordar determinadas situaciones de aprendizaje.

Esta investigación se acerca a dicho interés, pues la teoría APOE (acción, proceso, objeto y esquema) es una teoría institucionalizada de la matemática educativa enfocada al aprendizaje de los objetos matemáticos, particularmente al proceso de construcción de dichos objetos. Tomarla como base teórica para el diseño de actividades, implica que el docente comience a presentar o utilizar conocimientos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje y de la matemática misma, puesto que, la teoría APOE marca la construcción del objeto a partir de estructuras y mecanismos mentales que se encuentran señalados en una descomposición genética.

MARCO TEÓRICO

Dado que nuestra investigación involucra a la teoría APOE como base teórica de nuestros instrumentos, es importante que, basados en Escudero-Ávila et al. (2016), obtengamos la sensibilidad teórica correspondiente a dicha teoría, por esta razón, se presenta a continuación una pequeña introducción al modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), así como una sección correspondiente a la teoría APOE.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El modelo MTSK, como es sabido, es un modelo que mantiene su enfoque en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, dicho modelo, como lo mencionan Flores-Medrano et al. (2014) además de ser una propuesta teórica encargada de modelar el conocimiento del profesor de matemáticas, también es considerado como una herramienta metodológica. Es este último enfoque del MTSK el que se usó durante esta investigación.

En 2018, Carrillo-Yáñez y colaboradores, mencionan que el MTSK es una reconfiguración del conocimiento matemático (MK por sus siglas en inglés) y reinterpretación del conocimiento didáctico del contenido (PCK por sus siglas en inglés) considerados en el Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

Gracias a lo mencionado previamente, el MTSK, además de ser dividido en dos dominios (MK y PCK), cada uno de éstos se basta de tres subdominios y éstos a su vez en categorías, lo que permite considerar una noción más específica del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Además de considerar a las creencias del docente. Como se observa en la Figura 1, el MK se compone del conocimiento que se tiene acerca del contenido propio de las matemáticas (conocimiento de los temas), la relación entre estos contenidos (conocimiento de la estructura de las matemáticas) así como todo lo relacionado con el quehacer matemático (conocimiento de la práctica matemática). En el caso del PCK, éste considera los conocimientos acerca de lo marcado curricularmente con respecto a un concepto matemático (conocimiento de los estándares del aprendizaje), de las estrategias didácticas y herramientas para su enseñanza (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas), así como todo lo relacionado con su proceso de aprendizaje (conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas).

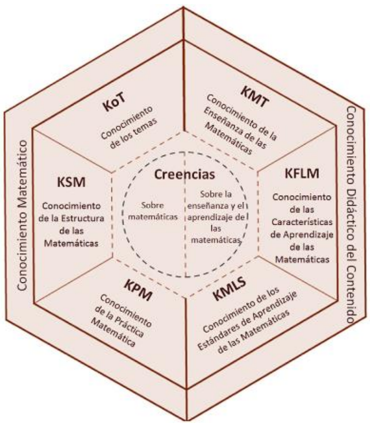

Figura 1. Modelo MTSK (Flores-Medrano et al., 2014)

En Sánchez-García et al. (2021) se puede encontrar una síntesis de las categorías que consideran cada uno de los subdominios descritos previamente (Ver Tabla 1 y Tabla 2).

Tabla 1. Subdominios y categorías del MK (Sánchez-García et al. 2021, p. 57)

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos Definiciones, propiedades y fundamentos Registros de representación Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	Conexiones de simplificación Conexiones de complejización Conexiones auxiliares Conexiones transversales
	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	Metaconocimiento correspondiente al quehacer matemático (definir, demostrar, usar heurísticos, ejemplificar)

Tabla 2. Subdominios y categorías del PCK (Sánchez-García et al. 2021, p. 58)

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento didáctico del contenido (PCK)	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de la matemática Recursos de enseñanza (físicas y digitales) Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Teorías de aprendizaje de las matemáticas Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas Interacción del estudiante con el contenido Intereses y expectativas del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Contenidos que se requieren enseñar Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado Secuenciación de los temas

Teoría APOE

La teoría APOE, acrónimo de acción, proceso, objeto y esquema, es una teoría de aprendizaje basada en la abstracción reflexiva de Piaget, en la que se considera una secuencia de acciones por parte del sujeto en un sistema de operaciones previamente interiorizadas (Arnon et al., 2014).

En Villabona y Solange (2016) se menciona que, para los términos de la teoría APOE, se entiende por estructura mental a todo aquello que se construye, y que continúa en construcción, dentro de la mente del sujeto que aprende y que además utiliza para dar sentido a situaciones matemáticas. Por otro lado, se considera como mecanismo mental, a todo medio por el que las estructuras mentales llevan a cabo su desarrollo o transformación.

Como se menciona previamente, dado un objeto matemático, la teoría APOE describe su proceso de construcción por parte del sujeto que aprende. Dicho proceso de construcción consiste en realizar acciones sobre el objeto, de tal forma que, al repetir y reflexionar sobre ellas, el sujeto las interioriza para transformarlas en procesos que puede imaginar completamente en su mente. Después, los procesos se encapsulan en objetos sobre los que nuevamente puede aplicar acciones para continuar con un ciclo de construcción mediante el cual logra estructuras más complejas (Arnon et al., 2014).

Este proceso también puede ser resultado de la transformación o interacción entre dos o más procesos previos (coordinación). Cuando el sujeto se ve en la necesidad de utilizar un objeto para la construcción de un nuevo proceso, debe llevar a cabo otro mecanismo, en el cual debe deconstruir dicho objeto, es decir, debe desepcapsularlo (Sánchez-García et al., 2021).

Como se observa, el análisis de construcción de un objeto matemático, en términos de la teoría APOE, considera mecanismos y estructuras mentales que generan en su conjunto un esquema, el cual es dinámico gracias a la génesis que se presenta durante el proceso de aprendizaje. Dicho análisis permite crear un modelo organizado que posibilita al docente o al investigador determinar los distintos momentos o pasos que se deben considerar durante el proceso de construcción, dicho modelo recibe el nombre de descomposición genética.

MÉTODO

Como lo menciona Escudero-Ávila et al. (2016), las investigaciones donde se utiliza el modelo MTSK como herramienta metodológica son de tipo cualitativo e interpretativo, y en este caso, es a partir de un estudio de caso instrumental, ya que se busca comprender el impacto que tiene la aplicación de la teoría APOE en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Nuestro caso corresponde a dos profesores de matemáticas que cuentan con estudios de máster profesionalizante y cuyos trabajos terminales utilizaron a la teoría APOE. Uno de ellos, Fernando (nombre ficticio), basó su trabajo de investigación en una descomposición genética para el tema de ecuación lineal a partir del trabajo de Borja (2015), apoyando su diseño en GeoGebra; y Adrián, en una descomposición genética para el tema de límites, así como en una secuencia de actividades propuesta por Pons (2014).

Siguiendo las etapas de una investigación con el modelo MTSK propuestas por Escudero-Ávila y colaboradores en 2016, se llevó a cabo la sensibilidad teórica con respecto a la teoría APOE. Después, la obtención de datos, a través de los instrumentos conformados por: la secuencia de actividades diseñada y presentada en los trabajos de máster de ambos informantes y un cuestionario que se aplicó en una entrevista. Se concluyó con la organización y el análisis de la información para su categorización en evidencia, indicio y oportunidad de investigación.

Es importante mencionar que, para el caso del profesor Fernando se analizó una secuencia de 21 actividades para el tema de ecuaciones lineales y para el caso del profesor Adrián, se analizó una secuencia de 16 actividades diseñada para el tema de límites.

ANÁLISIS

En esta sección se presentan algunos de los datos extraídos de los instrumentos, en donde se puede observar la presencia de conocimiento de los informantes, así como una síntesis de los conocimientos puestos en juego por parte de los profesores durante el diseño de su secuencia de actividades.

Con respecto al MK, nuestros informantes presentaron evidencia de conocimiento en los tres subdominios, principalmente en el conocimiento de los temas (KoT), dentro de este subdominio, las evidencias se inclinan más hacía la categoría de registros de representación. Un ejemplo de esto se puede observar en el caso de Fernando en el uso del constructo de multi-representaciones en un entorno virtual de aprendizaje, en su diseño de actividades (Ver Figura 2).

Esperamos que el presentar al estudiante el mismo objeto matemático en distintos registros de representación semiótica (algebraico, matricial y geométrico) favorezca la construcción del concepto.

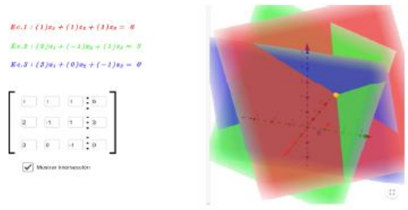

Figura 2. Extracto de la tesis de Fernando, actividad 11

Como se observa en la Figura 2, Fernando incluye en su diseño de actividades diversas representaciones que apoyan a la actividad, e incluso, describe el objetivo de dicho uso, esto junto con su conocimiento sobre el constructo de multi-representaciones que explica en el marco teórico de su trabajo, conforma una evidencia de conocimiento de Fernando que corresponde a la categoría de registros de representación del KoT.

Una situación interesante de mencionar, es que, de nuestros dos informantes, solamente uno presentó evidencia de conocimiento correspondiente a la categoría Fenomenología y aplicaciones del KoT (Ver Figura 3), esto se lo adjudicamos a que, en este caso, Fernando, consideró que su secuencia de actividades fue diseñada para un grupo de ingenieros y que dentro de los intereses y expectativas de los estudiantes se encuentran las aplicaciones, y que para el caso de Adrián, la secuencia de actividades fue diseñada para alumnos de nivel bachillerato y en este nivel no se consideran aplicaciones a detalle.

Asignación de Recursos
En una fábrica de ropa se producen tres estilos de camisas que llamaremos 1, 2, 3. Cada prenda pasa por el proceso de cortado, cosido, planchado y empaquetado. Las camisas se elaboran por lote. Para producir un lote de camisas del tipo 1 se necesitan 30 minutos para cortarlas, 40 minutos para coserlas y 50 minutos para plancharlas y empaquetarlas. Para el tipo 2, 50 minutos para cortar, 50 minutos para coser y 50 minutos para planchar y empaquetar. Para el tipo 3, 65 minutos para cortar, 40 minutos para coser y 15 minutos para planchar y empaquetar. ¿Cuántos lotes se pueden producir si se trabajan 8 horas en cortar, 8 horas en coser y 8 horas en planchar y empaquetar? Sean: x= lotes de la camisa 1 al día y= lotes de la camisa 2 al día z= lotes de la camisa 3 al día

Figura 3. Extracto de la tesis de Fernando, actividad 21

Otra situación interesante que se observó corresponde al KPM, principalmente en la Práctica de demostrar, pues en este caso, Fernando presenta un indicio de conocimiento y en el caso de Adrián se presenta una evidencia.

Basados en la caracterización de la práctica de demostrar que hacen Campos-Cano y Flores-Medrano (2019), la evidencia por parte de Adrián corresponde a que muestra conocimiento con respecto al papel de la demostración como verificación y comunicación, así como la fase de interpretación de esta (Ver Figura 4).

La pregunta 3 busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en sus imágenes en términos de desigualdades, guiándolos a la reflexión de que para cualquier valor que tome x en la tabla siempre se cumplirá que la distancia en valor absoluto de $f(x)$ y 4 es menor que 0.0001.

La pregunta 4 busca que el estudiante manifieste formalmente la existencia del límite, teniendo en cuenta que cuando los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 4 se aproximan a 0, los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de $f(x)$ y -2 son cero, por lo tanto cuando x tiende a 4, el límite de la función $f(x)$ es 4. (DG5)

Figura 4. Extracto de la tesis de Adrián, actividad 11

Como se observa en la Figura 4, el papel de verificación se presenta, puesto que Adrián menciona que se busca que el estudiante manifieste formalmente la existencia del límite y el papel de comunicación al explicar cómo se espera que lo manifieste. La parte de interpretación corresponde a la explicación de Adrián al mencionar la forma en la que se busca que el alumno coordine las aproximaciones en el dominio e imagen.

El indicio de Fernando corresponde a la categoría de usos de registros de representación en la demostración considerada por Campos-Cano y Flores-Medrano (2019), pues como se puede observar en la Figura 5, Fernando explicita la intencionalidad de presentar un applet para que alumno verifique geométricamente un teorema.

La actividad inicia presentando el concepto de SEL Homogéneo esto con la intensión de que el estudiante verifique incluso geométricamente este teorema al menos en $\mathbb{R}^3$.

Figura 5. Extracto de la tesis de Fernando, actividad 16

El indicio radica principalmente en que, aunque nuestro informante explicita la intencionalidad del registro geométrico, no explica la forma en la que se puede llevar a cabo dicha verificación, lo cual es confirmado por Fernando durante la entrevista.

Con respecto al PCK, por parte de nuestros informantes se encontró evidencia de conocimiento para todos los subdominios y categorías. Sin embargo, para la categoría recursos físicos y digitales para la enseñanza del KMT, solamente se encontró evidencia de conocimiento por parte de Fernando.

La evidencia de Fernando radica principalmente en que él decide utilizar la herramienta digital GeoGebra, pues como se observa en el siguiente diálogo, menciona que conoce las fortalezas y debilidades de dicho recurso y por tanto las virtudes que le puede proporcionar a su secuencia de actividades.

> Investigador: ¿Qué conocimientos acerca de GeoGebra pusiste en juego durante el diseño de las actividades?
>
> Fernando: Mucho de las construcciones, fueron prueba y error, y estar trabajando muchísimo (…). Yo tomé un diplomado en el INAOE (…) sobre el uso de tecnología y la primera parte es con GeoGebra, ahí aprendí bastantes cosillas, pero todo lo demás pues fue, estar trabajando de manera autodidacta.

Un fenómeno interesante de observar es que ambos informantes presentaron evidencias de conocimiento con respecto a teorías de enseñanza, aun utilizando una teoría de aprendizaje como base teórica para el diseño. Dicha evidencia de conocimiento está basada en que ambos informantes, al considerar una descomposición genética (la cual es presentada en el marco teórico de cada uno de los trabajos), esta les proporciona información sobre las estructuras mentales que se deben construir y, por tanto, ambos diseñaron o ajustaron actividades que promovieran estas construcciones.

CONCLUSIONES

Del trabajo de investigación se puede concluir que se evidenciaron todos los subdominios del modelo MTSK. Algunos de ellos se evidenciaron mucho más, como fue el caso del conocimiento de los temas, ya que en ambos informantes se observaron las diversas categorías que lo conforman. Una de las categorías del KoT que se presentó con mayor frecuencia en ambos informantes fue la de representaciones, principalmente en Fernando, quién realizó una secuencia didáctica asistida por GeoGebra, pues tenía muy clara la importancia del uso de la teoría de multi-representaciones para fomentar la comprensión y aprendizaje de los conceptos.

Con respecto al subdominio de la práctica matemática, se observó evidencia en todas las categorías, excepto la de recursos físicos y digitales para la enseñanza, de la que se encontró evidencia de conocimiento en solo un informante, aquel que utilizó GeoGebra en el diseño de su secuencia didáctica (Fernando).

Por otro lado, también se puede observar que nuestros informantes utilizan la teoría APOE como una teoría de enseñanza, esto gracias a la descomposición genética, pues esta marca claramente las estructuras mentales que se deben construir. Además, ellos se apoyaron en la metodología denominada ciclo de enseñanza ACE (actividades, discusión y ejercicios) y nutrieron el diseño con la teoría de representaciones y multi representaciones, así como del trabajo de Pons (2014), en el caso de Adrián y el modelo 3UV en el caso de Fernando.

De igual manera, aparecen evidencias de conocimientos en relación con la categoría de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos del subdominio KMT, pues ambos informantes diseñan actividades pensadas en la descomposición genética y se basan en ejemplos intencionados.

Por otro lado, también se puede observar que, gracias al propio orden marcado en la descomposición genética, nuestros informantes presentan una tendencia didáctica de tipo tecnológica, ya que el orden de actividades es intencionado y logístico.

En resumen, el utilizar una teoría institucionalizada, en este caso la teoría APOE, permitió el desarrollo y utilización de conocimiento especializado por parte de los docentes, principalmente el correspondiente al conocimiento didáctico del contenido. De igual manera les permitió utilizar el correspondiente a la práctica matemática puesto que, la propia descomposición genética es un análisis cognitivo del objeto matemático, sus propiedades y relaciones con otros conceptos u objetos matemáticos.

Por tanto, considerar la instrucción en teorías institucionalizadas en la formación docente y fomentar el diseño de actividades basadas en dichas teorías, permite desarrollar en el docente un conocimiento especializado más enfocado en el conocimiento didáctico del contenido.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue realizada gracias al financiamiento del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México, mediante la beca de maestría asignada con CVU: 1028924.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Campos-Cano, M. y Flores-Medrano, E. (2019). Prácticas matemáticas: un avance en su caracterización. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (87-94). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M. C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M., Montes (Eds.). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (60–68). Universidad de Huelva Publicaciones.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M.A. Montes, D. Escudero y E. Flores (Eds.), *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas* (71–93). Universidad de Huelva. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Sánchez-García, J. A., Flores-Medrano, E., Hernández, L. A., Juárez-Ruiz, E., (2021) ¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado? *Revistamultidisciplinar.com, 3 (1), 55-67.* https://doi.org/10.23882/DI2159

Villabona, D. P. y Roa, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación matemática*, *28*(2), 119-150. https://doi.org/10.24844/EM2802.05