# CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KOT) DE FUTUROS PROFESORES SOBRE LÍMITE DE SUCESIONES

## Knowledge of topics (KoT) of future teachers on limit of sequences

Bustos-Tiemann, C.[a]; Ramos-Rodríguez, E.[a]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

**Temática:** MTSK en diferentes temas y etapas

**Resumen.** El concepto de límite de sucesiones ha sido parte de diversas investigaciones dada su complejidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Desde el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK) se lleva a cabo un estudio cualitativo a partir de la planificación de una clase introductoria sobre el tema de límite de sucesiones. El objetivo del estudio fue analizar el conocimiento de los temas (KoT) de futuros profesores sobre límite de sucesiones. Los principales resultados dan cuenta de una fenomenología de aproximación simple intuitiva en los registros verbal, gráfico y numérico. También fue posible observar un KoT congruente con lo señalado en el nuevo currículo chileno. Estos hallazgos pueden ayudar a entender con más claridad los procesos asociados a la enseñanza y aprendizaje de este concepto y propiciar su estudio a los otros subdominios del MTSK.

**Palabras clave**. MTSK, didáctica, matemáticas, práctica educativa

**Abstract.** The concept of limit of sequences has been part of several investigations due to its complexity in the teaching and learning process. From the model of specialized knowledge of the mathematics teacher (MTSK), a qualitative study is carried out based on the planning of an introductory class on the topic of limit of sequences. The aim of the study was to analyze the subject knowledge (KoT) of future teachers on the limit of sequences. The main results show a phenomenology of simple intuitive approximation in the verbal, graphic and numerical registers. It was also possible to observe a KoT congruent with that indicated in the new Chilean curriculum. These findings may help to understand more clearly the processes associated with the teaching and learning of this concept and to propitiate its study in the other subdomains of the MTSK.

**Keywords**. MTSK, didactics, mathematics, educational practice

## INTRODUCCIÓN

La investigación sobre qué es lo que debiera conocer un profesor para la enseñanza de la matemática en el aula ha dado origen a diferentes modelos. Es así como a partir de los trabajos de Shulman (1986) con el concepto de Conocimiento Pedagógico del Contenido muchos investigadores han desarrollado esta línea de investigación surgiendo así el "Knowledge Quartet" (KQ) (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y el "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), por cuanto suponen una adaptación del modelo de Shulman al dominio de la matemática. Basándose en las ideas de los modelos anteriores, surge el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK, por sus siglas en inglés) desarrollado por Carrillo et al. (2013) en la Universidad de Huelva.

Este modelo considera dos grandes dominios, el conocimiento matemático MK y el conocimiento didáctico del contenido PCK, y dota de contenido a cada uno de estos dominios con tres subdominios y categorías internas. Además, considera las creencias de los profesores relacionadas con las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas.

Este estudio estará centrado en el subdominio del conocimiento de los temas (KoT) del MK, el cual tiene por objetivo describir qué y cómo conoce el profesor de matemática los temas que va a enseñar. Se proponen cuatro categorías para caracterizar el contenido del KoT y que pueden ser utilizadas independiente del tema en el cual el profesor esté trabajando (Carrillo et al., 2018). Las categorías son: fenomenología, definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación y procedimientos.

Por otro lado, en Chile, a partir del año 2020 se ha introducido en el currículo de enseñanza secundaria, algunos conceptos del cálculo, entre ellos el de límite de sucesiones, que antes eran exclusivos para la enseñanza superior. En este contexto, los profesores en formación y en servicio chilenos se han enfrentado a considerar este tema dentro de los que debe enseñar, el que muestra ser complejo pues muchas de las dificultades que enfrentan los estudiantes son reforzadas por la manera en que el profesor de matemática introduce dichos temas (Hitt, 2003).

El objetivo de esta investigación es analizar el conocimiento de los temas (KoT) de futuros profesores sobre límite de sucesiones. Para ello, nos enmarcamos en el modelo MTSK y consideramos la planificación de una clase introductoria de este tema presentada por un grupo de futuros profesores.

## MARCO DE REFERENCIA

El estudio consideró el modelo MTSK, en particular el subdominio KoT centrándose en las categorías *registros de representación* y *fenomenología*, las que, a continuación, se detallarán para el caso de límite de sucesiones.

### Registros de representación

En esta categoría se incluye el conocimiento de un profesor sobre las distintas formas en que se puede representar un tema, incluyendo la notación y el lenguaje matemático asociado a dichas representaciones (Vasco et al., 2016).

Respecto del concepto de límite consideramos la propuesta para trabajar en secundaria de Blázquez y Ortega (2001) con los registros verbal (V), numérico (N), gráfico (G) y algebraico (A). En el registro verbal el límite se representa como la aproximación óptima de los valores de la sucesión. En el registro numérico, se considera como un proceso de tendencia basado en una tabla de valores e imágenes de estos. El registro gráfico permite visualizar las situaciones y realizar acercamientos por medio de los puntos de la gráfica y en el sistema algebraico aparecen los algoritmos del cálculo procedimental de límites y la definición métrica.

Cada representación destaca de diferente manera algunos rasgos del objeto matemático a estudiar, por ejemplo, para comprender el límite infinito de sucesiones, las representaciones gráficas no son suficientes, y tampoco con el apoyo de un ordenador es posible detallar su comportamiento, por ello es necesario la utilización de una representación tabular (Radillo y González, 2014).

### Fenomenología

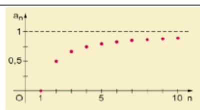
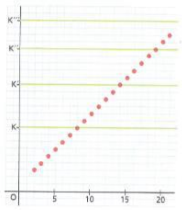
Comprende el conocimiento de profesor sobre fenómenos o situaciones asociados a los significados de un tema matemático (Freudenthal, 1983) así como aquellos que aparecen en la génesis misma del concepto. También comprende el conocimiento de los usos y aplicaciones de un tema.

Consideramos los fenómenos asociados al concepto de límite de sucesiones por Claros et al. (2016) denominados como: de aproximación simple intuitiva y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones para el límite finito de una sucesión. Para el caso de límite infinito de una sucesión consideramos los fenómenos caracterizados por Arnal (2019) como: crecimiento (decrecimiento) intuitivo ilimitado e ida y vuelta para sucesiones de límite infinito. Explicamos a continuación cada uno de ellos:

- *Fenómeno de aproximación simple intuitiva para sucesiones con límite finito (a. s. i)*. Si consideremos $k$ términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (k, a_k)$, vamos a caracterizar la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ cuando "parecen acercarse" a otro valor fijo (Claros et al., 2016).
- *Fenómeno de crecimiento (decrecimiento) intuitivo ilimitado para sucesiones con límite infinito (c. i. i / d. i. i)*. Es el fenómeno que se observa cuando los valores de la sucesión se van haciendo cada vez mayores a medida que avanzamos en ella. Como consecuencia de este fenómeno se puede intuir que la sucesión es creciente no acotada superiormente, es decir, crece ilimitadamente (c. i. i). De manera análoga d. i. i es el fenómeno que se observa cuando los valores de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeños y es posible deducir intuitivamente que la sucesión es decreciente. Esta sucesión puede estar o no estar acotada inferiormente. En el caso de no estar acotada inferiormente es posible observar el fenómeno de decrecimiento intuitivo ilimitado (Arnal, 2019).
- *Fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones con límite finito (i. v. s. f)*. La seguridad de que un candidato a límite es el límite de una sucesión se consigue a través del fenómeno de retroalimentación (Claros et al., 2016). Dos procesos caracterizan este fenómeno. El primer proceso, denominado *de ida*, se produce cuando en la definición aparece la expresión: "para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural $N$". La "ida" se establece partiendo de la variable dependiente y llegando a la variable independiente. El segundo proceso, denominado *de vuelta*, se produce cuando en la definición aparece a expresión: "si $n \geq N$ se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$". En la "vuelta" se parte de la variable independiente y se acaba en la variable dependiente.
- *Fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones con límite infinito (i. v. s. i)*. Para este fenómeno consideraremos la definición de Linés (1983). Esta definición plantea para el límite más infinito que "la sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite "más infinito", si para cada elemento H de ℝ, existe un número natural ν, tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$". El primer proceso, denominado "ida" corresponde al fragmento: "si para cada elemento $H$ de ℝ, existe un número natural $v$". El segundo proceso, denominado "vuelta" corresponde al fragmento "tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$". La retroalimentación se manifiesta en la observación conjunta de ambos procesos (Arnal, 2019).

Los fenómenos anteriormente mencionados hacen referencia a dos enfoques: uno intuitivo (a. s. i y c. i. i) y otro formal (i. v. s. f y i. v. s. i) presentes en la enseñanza del concepto de límite a nivel de secundaria (Arnal et al., 2020) y cada fenómeno puede introducirse usando un sistema de representación (de los cuatro mencionados anteriormente). Esto nos permite relacionar ambas categorías del KoT resultando dos posibilidades. La primera de ellas se muestra en la tabla 1, donde se articulan los sistemas de representación con los fenómenos desde el enfoque intuitivo.

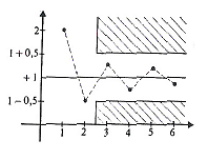
Tabla 1. Subcategoría del KoT, representaciones y fenómenos para límite de sucesiones

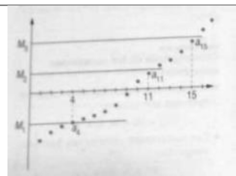
<table>
<tr><th></th><th colspan="4">Sistemas de representación</th></tr>
<tr><th></th><th>Verbal</th><th>Numérico</th><th>Gráfico</th><th>Algebraico</th></tr>
<tr>
<td>a. s. i</td>
<td>En la sucesión $\left\{\begin{matrix} 0{,}6; 0{,}66; \dots ; \\ 0{,}66 \dots 6 \dots ; \dots \end{matrix}\right\}$ sus términos se aproximan cada vez más al número racional $\frac{2}{3}$. Se suele decir que los términos de cada sucesión tienden o se aproximan al número $\frac{2}{3}$.</td>
<td>Sea la sucesión $a_n = \frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{n+1}}$ entonces:<br>
<table>
<tr><th>$n$</th><th>$a_n$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1,81…</td></tr>
<tr><td>100</td><td>1,98…</td></tr>
<tr><td>10.000</td><td>1,999 …</td></tr>
<tr><td>1.000.000</td><td>1,99999…</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>tiende a ∞</td><td>tiende a 2</td></tr>
</table>
</td>
<td><br>(MINEDUC, 2021)</td>
<td>Sea $a_n = \frac{\mathbf{2n-3}}{\mathbf{n+1}}$<br>¿es posible obtener un término de la sucesión cuya distancia a 2 sea menor que<br>$\varepsilon = 0{,}5$,<br>$\varepsilon = 0{,}05$,<br>$\varepsilon = 0{,}001$ ?<br>Es decir,<br>¿es posible encontrar $n$ tal que:<br>$|a_n - 2| < 0{,}5$;<br>$|a_n - 2| < 0{,}05$;<br>$|a_n - 2| < 0{,}001$?</td>
</tr>
<tr>
<td>c. i. i</td>
<td>A medida que n se hace mayor, los términos de las sucesiones<br>$a_n = n^2 + 1$;<br>$b_n = 2n^3 + 1$;<br>$c_n = 5n^4 + 2$<br><br>se hacen cada vez mayores, por lo tanto<br>$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ;<br>$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ;<br>$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$</td>
<td>Dando valores a n cada vez más grandes se obtiene para $a_n = n^2 + 1$ la siguiente tabla:<br>
<table>
<tr><th>$n$</th><th>$a_n$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>101</td></tr>
<tr><td>100</td><td>10.001</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>$\longrightarrow$<br>$+\infty$</td><td>$\longrightarrow$<br>$+\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td>En la sucesión $a_n = \frac{n^2-3}{n}$ se puede verificar que partiendo de:<br>$n^2 + n + 3 > 0;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$<br>$\Leftrightarrow$<br>$\frac{(n+1)^2 - 3}{n+1} > \frac{n^2 - 3}{n}$<br>$\Leftrightarrow$<br>$a_{n+1} > a_n;\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$<br><br>Y se podría intuir que<br><br>$a_n > K;\ \forall\, K \in \mathbb{R}$</td>
</tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia

La tabla 2, muestra las representaciones asociadas a los fenómenos desde el enfoque formal.

Tabla 2. Representaciones asociadas a los fenómenos desde el enfoque formal

<table>
<tr><th>Fenómenos</th><th colspan="4">Sistemas de representación</th></tr>
<tr><th></th><th>Verbal</th><th>Numérico</th><th>Gráfico</th><th>Algebraico</th></tr>
<tr>
<td>i. v. s. f</td>
<td>Se dice que el límite de la sucesión $\{\boldsymbol{a_n}\}$ es el número real L y se escribe<br>$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = L}$<br>cuando para todo número real positivo $\boldsymbol{\varepsilon}$ se puede determinar</td>
<td>En este caso se explica la definición eligiendo un valor de épsilon y determinando el N correspondiente.<br>
<table>
<tr><th>$\varepsilon$</th><th>N</th><th>$a_N$</th></tr>
<tr><td>$10^{-1}$</td><td>9</td><td>$a_9$</td></tr>
<tr><td>$10^{-2}$</td><td>99</td><td>$a_{99}$</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td>$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n+1} = 2$<br>El fenómeno de retroalimentación exige construir una función $(\mathcal{E} - N)$, es decir, la ida es desde el entorno del límite hacia la variable natural:</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>un número natural $\boldsymbol{N}$ tal que para todo $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{N}$ , se verifica que $\boldsymbol{a_n}$ pertenece al entorno de centro $L$ y radio $\boldsymbol{\varepsilon}$ que representamos por $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\varepsilon})$.</td>
<td><table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$10^{-50}$</td><td>9…9 (50 nueves)</td><td>$a_{9\ \dots\ 9}$</td></tr></table>(Vizmanos et al., 1981)</td>
<td></td>
<td>$$\left|\frac{2n-5}{n+1}-2\right| < \varepsilon$$ Implica tomar $$N \geq \frac{7}{\varepsilon} - 1$$ Y la vuelta, desde $n > N$ permite comprobar que $$a_n \in E(2, \varepsilon)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>i. v. s. i</td>
<td>Se dice que una sucesión de números reales positivos, tiene por límite a infinito o que tiende a infinito, cuando fijado un número positivo M tan grande como se quiera, se puede determinar un término de la sucesión tal que él y todos los que le siguen sean mayores que M</td>
<td>Para $a_n = n^2 + 1$ consideramos M=10.000 y al completar la tabla de valores buscamos un natural $v$ de modo que $a_n > 10.000$<table><tr><td>$n$</td><td>$a_n$</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>10</td><td>101</td></tr><tr><td>100</td><td>10.001</td></tr><tr><td>…</td><td>…</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>Luego, $v$=100 y para todo $n \geq v$, se tiene que $a_n > 10.000$</td>
<td>En el gráfico se parte de un número real $M_2$ en el eje Y y “vamos” a un número natural v, v=11 en el eje X, y “volvemos” desde $n \geq v$, por ejemplo, n=15 hacia un número real de la sucesión obteniendo $a_{15} > M_2$ (González et al., 1995).</td>
<td>En la sucesión $$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$ Dado $M = 10.000$ $\exists v \in \mathbb{N}$ / $$a_n > 10.000$$ Si $v$ =23 se tiene $$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{23} > 10.000$$ Entonces la vuelta es desde $n$=24, ($n \geq v$) hacia un número real de la sucesión, $$a_{24} = 16.834{,}11$$</td>
</tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia

## METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en el paradigma cualitativo desde un enfoque descriptivo-interpretativo (Hernández et al., 2014). El diseño del estudio se enmarca en un estudio de casos en el cual un grupo de cuatro futuros profesores (FP) que están en su cuarto año de la carrera de Pedagogía en Matemática de una Universidad chilena. El caso se ha escogido por criterio de accesibilidad y disponibilidad.

El instrumento de recogida de datos es una planificación diseñada por el grupo de FP con el objeto de introducir el concepto de límite de sucesiones.

Para el análisis se ha empleado el análisis de contenido (Flick, 2004), considerando como unidades de análisis los párrafos o conjunto de estos con alguna idea en común. Las categorías de análisis corresponden a las categorías del KoT consideradas para el estudio, es decir, *registros de representación* y *fenomenología*.

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En la tabla 3 podemos ver la presencia/ausencia de los indicadores en la planificación de los FP. La categoría *registros de representación* (V, N, G y A) se considera en relación con la categoría *fenomenología*, en donde 1 significa presencia y 0 ausencia.

Tabla 3. Categorías presentes/ausentes

| **Categorías KoT** | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Fenomenología y Registros de representación*** | Enfoque intuitivo | | | | | | | | Enfoque formal | | | | | | | |
| | a. s. i | | | | c. i. i (d. i. i) | | | | i. v. s. f | | | | i. v. s. i | | | |
| | V | N | G | A | V | N | G | A | V | N | G | A | V | N | G | A |
| | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Fuente: Elaboración propia

Para el análisis, primeramente, hemos observado la tarea central de la clase propuesta (Figura 1). De ella es posible evidenciar conocimiento de los FP sobre el fenómeno a.s.i en los registros numérico y gráfico. En el registro numérico, si observamos la secuencia $(0,1), (1,\frac{1}{4}), (2,\frac{1}{16}), (3,\frac{1}{64}),\ldots$ en la representación tabular, es posible intuir que, a medida que n crece, el valor de las áreas parece acercarse a un valor fijo, en este caso cero.

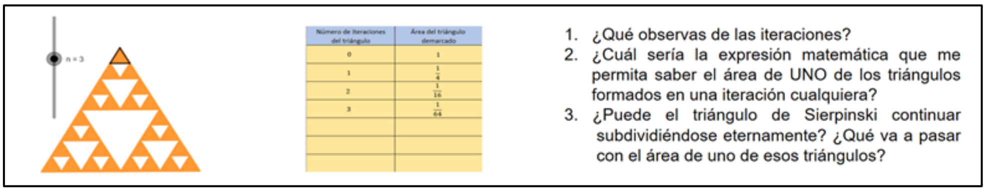



Figura 1. Tarea escolar propuesta por los futuros profesores

En el registro gráfico los FP provocan observar en sus alumnos que las áreas de los triángulos son cada vez menores después de cada iteración. Cada iteración significa unir los puntos medios de los lados y remover el triángulo del medio del triángulo original. Se puede intuir, haciendo uso de conocimientos sobre regularidades, que la sucesión de valores de las áreas de los triángulos así obtenidos se aproxima a cero a través del reconocimiento del patrón infinito. En la figura 1 el fenómeno a.s.i se presenta a través de un ejemplo lo que coincide con el resultado del estudio de Claros et al. (2016) en donde se afirma que el fenómeno a.s.i se observa en mayor medida en el formato ejemplo.

El grupo de FP propone como institucionalización del saber lo expuesto en la figura 2.

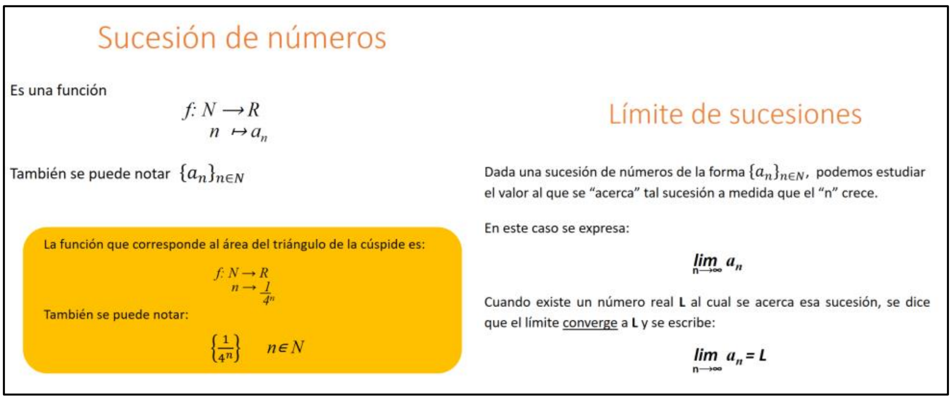



Figura 2. Institucionalización sobre sucesiones y límite de sucesiones

Se puede evidenciar que los FP consideran el concepto de límite de sucesiones también como una aproximación simple intuitiva, pero en el registro de representación verbal. En este caso la idea de convergencia la presenta el grupo de FP como un acercamiento o aproximación a un valor real L. De esta manera los FP evidencian el conocimiento de la idea de aproximación como noción intuitiva de la idea de límite de una sucesión. En este caso el fenómeno a.s.i se presenta a través de una definición lo cual, junto al formato de ejemplo, pero en menor medida, también es evidenciado por las investigaciones de Claros et al. (2016).

## CONCLUSIONES

Nos hemos propuesto estudiar el conocimiento especializado del tema de FP sobre límite de sucesiones. El análisis ha permitido evidenciar conocimiento de los FP en las dos categorías del KoT consideradas, *fenomenología* y *registros de representación.*

De esta manera ha sido posible observar conocimiento de los FP sobre los fenómenos de aproximación intuitiva en los registros verbal, numérico y gráfico para el concepto de límite de sucesiones. Es de notar que el fenómeno a.s.i se evidenció a través de los formatos de ejemplo y definición, con mayor presencia de ejemplos, lo que coincide con el resultado del estudio de Claros et al. (2016) en donde se afirma que el fenómeno a. s. i se observa en mayor medida en el formato ejemplo. Por otro lado, el fenómeno c.i.i se evidencia para la sucesión de perímetros en los registros verbal y gráfico. Es posible suponer además que, debido a ser una clase de introducción al tema, se haya optado por una aproximación intuitiva como comienzo de una secuencia didáctica sobre la enseñanza del límite y de esta manera los enfoques formales no aparezcan.

Por otro lado, se observa también que la definición de límite de sucesión dada no es completa desde el punto de vista matemático, por ser una aproximación intuitiva, pero tampoco es incorrecta. Además, los registros de representación utilizados permitieron abordar el concepto de límite de diferentes formas permitiendo una fenomenología más completa.

El conocimiento de los temas (KoT) evidenciado es congruente con lo establecido en el nuevo currículo chileno en donde se sugiere el reconocimiento de patrones infinitos para acercarse de manera intuitiva a la noción de límite (MINEDUC, 2021).

Se espera que este estudio evidencie parte del conocimiento especializado del profesor de matemática en la enseñanza del concepto de límite de sucesiones y permita la reflexión sobre las categorías del KoT sobre el tema específico mencionado. Se espera además seguir construyendo las categorías asociadas a los cinco subdominios restantes del MTSK sobre el concepto de límite de sucesión y extenderlo al concepto de límite de función.

**Agradecimientos**

Se agradece a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile, Proyecto FONDECYT Iniciación Nº11190553, y a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Beca Postgrado PUCV 2021.

**Referencias**


Arnal-Palacián, M. (2019). *Límite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Tesis de doctoral. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid.

Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., y Sánchez-Compaña, M. T. (2020). Límite infinito de sucesiones en libros de texto españoles: desde 1936 hasta 2019. *PNA*, *14*(4), 295-322.

Baeza, A., Córdova, C., García, M., et al. (2010). *Manual esencial estadística, probabilidad y precálculo*. Santillana del Pacífico.

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Relime*, *4*(3), 219-236.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Munoz-Catalan, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquia: CERME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Claros, J., Sánchez, M. y Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933–2005. *Educación Matemática 28*(1), 125-152.

Flick, U. (2004). *Introducción a la Investigación Cualitativa*. Ediciones morata S.L.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig (2001), publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* Cinvestav.

González, C., Llorente, J., y Ruiz, M.J. (1995). *Matemáticas I.* EDITEX.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta edición). Editorial McGraw-Hill.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, F. Rivera, y S. Ursini (Eds.), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 91-111). Fondo de Cultura Económica.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2021). *Matemática. Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales para Formación Diferenciada 3º y 4º Medio*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.

Radillo, M. y González, L. (2014). Enseñanza del concepto de límite de una función mediante sus diversas representaciones semióticas, a nivel licenciatura. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 853-861). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de Álgebra Lineal. Un estudio de casos en el nivel universitario.* Tesis de doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M.A., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 222-239.

Vizmanos, J., Anzola, M., y Primo M. (1981). *Funciones-2 Matemáticas 2º B.U.P. Teoría y Problemas*. Editorial S.M.