CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE ROTAÇÃO E REVOLUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Mathematics prospective teachers' Specialized Knowledge on the topics of rotation and revolution of geometric figures

Oliveira, M. P. [a]; Almeida, A. R. [b], Ribeiro, M. [a]

[a] Universidade Estadual de Campinas (Brasil); [b] Pontifícia Universidade Católica de Campinas (Brasil)

Temática: 1 – MTSK na formação docente.

Resumo. Neste texto, temos por foco obter uma compreensão mais ampla do conhecimento especializado de futuros professores de matemática sobre figuras planas e espaciais, diferenciando-as por meio de rotações e revoluções. Focamos o conhecimento revelado sobre os tópicos de rotação e revolução de figuras geométricas, tendo as informações sido coletadas através da implementação de uma Tarefa para Formação. Os futuros professores revelaram conhecimentos relativos a exemplos de rotações e revoluções, bem como conhecimentos de figuras que podem ser formadas por revolução, confundindo com frequência revoluções de figuras geométricas com alguns tipos de rotações, sendo, dessa forma importante fazer a distinção destas duas transformações de forma relacionada com a prática futura.

Palavras-chave. Conhecimento especializado, futuros professores, rotação de figuras geométricas, revolução de figuras geométricas.

Abstract. This paper focus on obtaining a deeper understanding of prospective mathematics teachers' specialized knowledge about plane and spatial figures, differentiating them through rotations and revolutions. We focus on the revealed knowledge on the topics of rotation and revolution of geometric figures and data has been collected from a task for teacher education. Prospective teachers' reveal knowledge regarding examples of rotations and revolutions and of figures that can be obtained by revolution. They confuse geometric figures revolutions with some types of rotations, and it is therefore important to distinguish these two transformations in contexts preparing for future prospective teachers' practices.

Keywords. Specialized knowledge, prospective teachers, geometric figures rotation, geometric figures revolution.

INTRODUÇÃO

A Geometria é uma área tradicionalmente pouco abordada nas salas de aula brasileiras (Lorenzato, 1995) e, em particular, também o são os tópicos dentro das transformações geométricas, sendo um destes fatores o conhecimento insuficiente dos professores nesses tópicos (e.g., Delmondi & Pazuch, 2018). O estudo de transformações geométricas mostra-se responsável por desenvolver, entre outras, as habilidades da visualização, do pensamento crítico, da intuição, da resolução de problemas e da demonstração matemática (Gomes, 2012). Um dos fatores responsáveis para melhorar a aprendizagem dos alunos é o conhecimento do professor, e esse tem sido o foco de pesquisas recentes na área da educação matemática (e.g., Ribeiro, Gibim, & Alves, 2021).

Muitas pesquisas sobre a formação de professores possuem foco no conhecimento do professor no âmbito de um determinado tópico matemático (e.g., Carrillo et al., 2018, Ribeiro et al., 2021). Nesta pesquisa, temos como foco o conhecimento de futuros professores sobre a transformação geométrica rotação e a revolução de figuras geométricas e buscamos respostas para a seguinte questão: Que conhecimento matemático especializado é revelado por futuros professores de matemática sobre rotação e revolução de figuras geométricas?

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As transformações geométricas são construções geométricas que preservam certas propriedades em relação à sua construção original (Wagner, 2007). As rotações são um tipo de transformação que leva uma imagem inicial a uma nova posição, de forma que cada ponto correspondente entre a imagem inicial e a imagem rotacionada forma um mesmo ângulo a partir de uma origem comum (Resende & Queiroz, 2008).

Existem as rotações no plano, em que existe um plano que contém ambas as imagens iniciais e finais da rotação, e cuja origem é formada por um ponto. Neste caso, rotacionamos figuras com dimensão no máximo igual a dois. Há também a possibilidade de rotacionarmos no espaço tridimensional, onde a origem da rotação (também chamada de eixo) é formada por uma reta (Wagner, 2007). N este caso, podemos também rotacionar figuras espaciais.

Já a revolução de figuras ocorre somente no espaço tridimensional, em torno de um eixo. Considera-se uma figura sendo rotacionada em torno desse eixo, em todas as suas posições possíveis, formando uma nova figura composta pela união de todas estas imagens (Dolce & Pompeo, 1995). Um exemplo de revolução de figura plana é inserido abaixo:

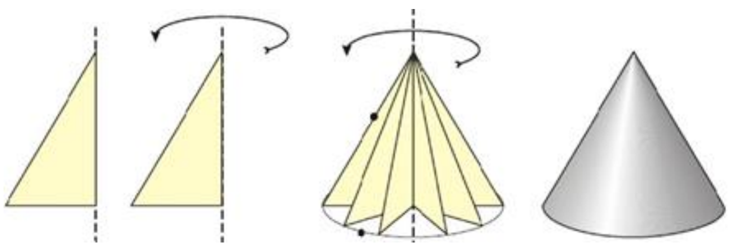


Figura 1. Exemplo da revolução de um triângulo.

Precisamos, além de discutir algumas definições sobre estes tópicos, discutir o conhecimento associado a eles. Para isso, fazemos o uso do *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*[1] - MTSK (Carrillo et al., 2018), que é um modelo teórico para entendimento do conhecimento especializado do professor de matemática, o qual também terá uma função analítica neste trabalho. O modelo MTSK é organizado em dois domínios, o *Mathematical Knowledge* (MK), composto pelo conhecimento matemático em cada um dos tópicos e *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), composto pelo conhecimento didático em cada um dos tópicos. O modelo contempla também as crenças e concepções dos professores, *Beliefs*. Esta pesquisa foca no MK e descreveremos características desse domínio a seguir.

O MK se estrutura nos subdomínios *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Strructure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of the Practices in Mathematics* (KPM). O KoT compreende o conhecimento do que e de que forma o professor conhece aquele tópico matemático e envolve o conhecimento, por exemplo, de definições, procedimentos

---

[1] Optamos por manter todas as nomenclaturas referentes do modelo em Inglês, uma vez que esta é uma conceitualização do conhecimento professor divulgada e reconhecida internacionalmente e sua tradução poderia desvirtuar não apenas o sentido mas, essencialmente, o entendimento dos conteúdos de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

e propriedades do tópico em questão. O KoT compreende as categorias: *(i) definitions, properties and foundations, (ii) phenomenology and applications, (iii) register of representation, e (iv) procedures*. Faz parte do subdomínio KoT conhecer elementos necessários para realizar rotações e revoluções, procedimentos para realizar essas transformações e notações para representar estas transformações, por exemplo.

O KSM compreende o conhecimento sobre as conexões entre os diferentes tópicos matemáticos; as categorias empregadas pelo KSM são: *(I) auxiliary connections, (ii) transversal connections, (iii) connections based on simplification e (iv) connections of complexification.* Neste trabalho, usaremos a categoria *auxiliary connections*. Faz parte dessa categoria, conhecer propriedades de figuras que podem sofrer rotações ou revoluções, como classificação dos triângulos e quadriláteros.

O KPM compreende o conhecimento sobre as formas como são produzido o conhecimento matemático e envolve conhecimento, por exemplo, de demonstrações, do uso de definições e de formas de resolução de um problema. O KPM não possui categorias definidas, mas, para esse trabalho, consideraremos o que está disposto em Delgado-Rebolledo e Zakaryan (2020): *(i) ways of proceeding, (ii) ways of validating, (iii) ways of exploring,* e *ways of generating knowledge in mathematics.* Neste trabalho, usaremos a categoria *ways of proceeding*, da qual faz parte conhecer formas de criar definições destas transformações geométricas e conhecer generalizações possíveis acerca destas transformações.

CONTEXTO E MÉTODO

Esta pesquisa tem cunho qualitativo e foi utilizada a metodologia de estudo de caso (Stake, 2005). A coleta das informações se deu em uma disciplina de educação matemática ministrada em um curso de licenciatura em Matemática – formação de professores[2] (Brasil).

O objetivo da disciplina era desenvolver o conhecimento especializado dos futuros professores em alguns tópicos matemáticos e, para atingir tal objetivo, as aulas foram dinamizadas por meio de Tarefas para Formação – TpF (Ribeiro, Almeida & Mellone, 2021), que são especificamente elaboradas para aceder e desenvolver o conhecimento dos (futuros) professores nos tópicos abordados. A tarefa em questão abordava diferenciação de figuras planas e espaciais por meio de rotações e revoluções. Aqui, discutimos duas questões da TpF que eram preliminares para estabelecer o ponto de partida para as discussões posteriores:

(i) Podemos rotacionar figuras geométricas bidimensionais? Dê exemplos.
(ii) Podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplos.

A TpF foi implementada em dois momentos: um primeiro com discussões em pequenos grupos (dois a três integrantes) para resolver a tarefa, e uma discussão plenária ao final com todos os futuros professores. As informações aqui analisadas fazem parte das discussões de três grupos de futuros professores (2 ou 3 elementos cada) para a primeira parte da implementação da tarefa e foram obtidas através da transcrição das discussões de cada grupo (gravadas em áudio) e de suas produções escritas para a TpF. Foi efetuada a identificação do conhecimento especializado revelado pelos grupos, e então determinamos cada descrição de conhecimento a uma categoria do modelo MTSK.

[2] Que vão lecionar para alunos de 10 a 17 anos.

Posteriormente, agrupamos e sintetizamos o conhecimento revelado em cada categoria por meio de descritores de conhecimento (Zakaryan & Ribeiro, 2019).

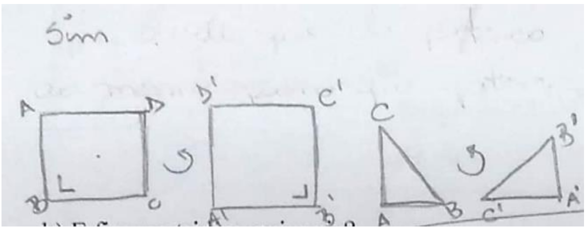
Para esses descritores, associam-se acrônimos correspondentes às categorias que se discutem neste trabalho: KoTd - *Definitions, properties and foundations,* KoTph - *Phenomenology and applications,* KoTr - *Register of representation*, KoTpc - *Connections of complexification*, KSMa - *Auxiliary connections*, e KPMwp - *Ways of proceeding.*

Apresentamos na análise trechos que possibilitaram a discussão dos descritores de conhecimento para sintetizar o conhecimento revelado e, nesses trechos, identificamos a categoria em que esse conhecimento se situa. No final, mostramos os descritores criados para sintetizar este conhecimento. As produções escritas para a TpF são apresentadas em imagens e quando é o caso efetuamos a transcrição do texto incluído; as transcrições estão organizadas em três colunas, apresentando as linhas, nome (fictício) do futuro professor e a transcrição. A numeração da linha da transcrição é extraída da transcrição do grupo para toda a tarefa. Quando nos referimos às linhas da transcrição, utilizamos parênteses para indicar as linhas, por exemplo, (40-42) para nos referirmos às linhas de 40 a 42.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

Os futuros professores revelam conhecer exemplos de rotações de figuras planas e espaciais e, dessa forma, revelam também conhecer a distinção entre rotações no plano e rotação no espaço. Porém, há futuros professores que revelam conhecimento sobre o tópico de revoluções ao responderem questões que deveriam ser sobre rotações, revelando conhecimento adequado sobre esse outro tópico, mas revelando uma possível confusão entre as duas transformações geométricas.

Iniciamos a análise de uma produção escrita do primeiro grupo em resposta à pergunta “(i) *podemos rotacionar figuras geométricas bidimensionais? Dê exemplos*”



Sim (desenho)

Figura 2. Produção do grupo 1 sobre rotações no plano.

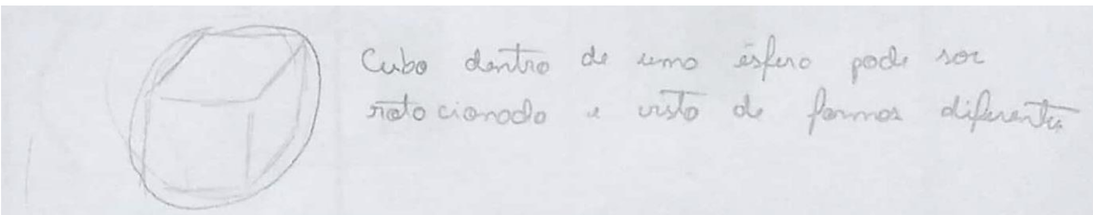
Os futuros professores revelam conhecer a rotação no plano de um quadrado e conhecer a rotação no plano de um triângulo, revelando conhecer exemplos deste tipo de rotação (KoTd: conhecer exemplos de rotação de figuras planas no plano).

Além disso, revelam conhecimento sobre algumas notações necessárias para a representação desta rotação: a representação das imagens iniciais e finais da rotação são feitas de forma separada, sem sobreposição; há o uso de notação para nomear os vértices das imagens do quadrado e do triângulo (quadrados ABCD e A’B’C’D’, e triângulo ABC e A’B’C’) indicando notações diferentes antes e após a rotação, mas que relacionam os vértices correspondentes destas figuras (KoTr: conhecer uma notação para representar os vértices correspondentes de figuras planas em uma rotação no plano); e revelaram também conhecer o uso de uma seta que indique o sentido e dar ideia de movimento para esta transformação geométrica (Resende & Queiroz, 2008). Dessa forma, os futuros professores revelam conhecer diversas características necessárias para representar a rotação no plano por meio de um desenho (KoTr: conhecer uma notação para representar o movimento de giro em uma rotação no plano).

Outro grupo aborda diferentes exemplos de rotação de figuras planas durante a discussão da mesma questão:

37. Mário: Ó, eu adoro assim, e que são coisas da escola,
38. você tem um triângulo equilátero, se você rotacionar ele 60º
39. você encontra outros três pontos que são de um hexágono, por
40. exemplo, a estrela de Davi né. É uma rotação.
(...)
54. Mário: O quadrado se você rotacionar 45º você encontra os outros 4 pontos
55. que são do octógono
(...)
58. Mário: Vai dobrando, de três passa para seis.

Este futuro professor revela conhecer a rotação no plano de um triângulo equilátero (39-40), revelando conhecimento de um exemplo deste tipo de rotação (KoTd: conhecer o resultado da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano). Apesar de não mencionar explicitamente, considera esta rotação a partir do centro do triângulo equilátero, e, dessa forma, ao rotacionar 60º, os vértices encontram-se em uma bissetriz do ângulo central da figura inicial – o que leva a formar um hexágono regular. O futuro professor revela conhecer que, sendo a rotação efetuada desta forma, os vértices dos triângulos iniciais e finais formam um hexágono (KoTpc: conhecer o resultado da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano).
Nas linhas 41 e 42, revela conhecer o exemplo da rotação no plano de um quadrado por um ângulo de 45º - quando o centro de rotação é a interseção das diagonais (KoTd: conhecer um exemplo da rotação de 45º de um quadrado no plano). Ao identificar que os vértices do quadrado inicial e transformado pela rotação formam um octógono, revela também um conhecimento sobre características do resultado desta rotação (KoTpc: conhecer o resultado da rotação de 45º de um quadrado no plano). Quando o futuro professor identifica que a quantidade de vértices "vai dobrando, de três passa para seis" (58), ele analisa um padrão que ocorre ao rotacionar figuras regulares e faz uma generalização (KPMwp: conhecer que ao unir os vértices das imagens iniciais e finais de figuras planas regulares rotacionadas obtemos nova figura regular com o dobro de vértices).
Relativamente à questão "*podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplo*", este grupo apresenta um exemplo da rotação de um cubo (KoTd: conhecer exemplos de rotação no espaço de figuras espaciais).



Cubo dentro de uma esfera pode ser rotacionado e visto de formas diferentes.

Figura 3. Produções do Grupo 2 para a pergunta “podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplo”.

A produção do grupo é complementada pela transcrição da sua discussão:

80. Mário: Você pode imaginar o cubo dentro da esfera, e você pode mudar os
81. vértices dele de lugar sobre a esfera
82. Júlia: Está rotacionando no centro, não é?

Os futuros professores explicitam que a rotação tem de possuir um centro de rotação – a origem – e que aqui corresponde ao centro do quadrado (82) – interseção das diagonais (KoTp: conhecer que a rotação possui uma origem). No espaço, esse centro corresponde a uma reta, mas os futuros professores não tornam esse conhecimento explícito.

Os futuros professores destes dois grupos revelaram um conhecimento acerca de rotações associado a serem isometrias e construírem imagens congruentes às iniciais (Wagner, 2007).

Houve grupos que revelaram conhecimento sobre revolução de figuras respondendo à questão “*podemos rotacionar figuras geométricas tridimensionais? Dê exemplo*”, como o grupo 3 mostrado a seguir:

59. Carlos: Por isso eu pensei em paraboloides e hiperboloides.
60. Pedro: Acho que você pode.
61. Carlos: Se você rotacionar um círculo, dá uma esfera.

(…)

76. Carlos: Rotacionar um triângulo vira um cone.

(…)

79. Pedro: Um triângulo retângulo.
80. (…)
81. Carlos: Não precisa ser retângulo.
82. Pedro: Para dar o cone… precisa ser retângulo.
83. Carlos: Não, precisa ser isósceles só.

Os futuros professores (59) revelam um conhecimento de exemplos de figuras formadas por revolução (Dolce & Pompeo, 1995), referindo, em particular, paraboloides e hiperboloides (KoTd1: conhecer que paraboloides e hiperboloides são exemplos de figuras que podem ser formadas por meio de revolução). Revelam também conhecer também os procedimentos de revolução de um círculo (61) para obtenção de uma esfera (KoTpc: conhecer que a revolução de um círculo pode gerar uma esfera) e da revolução de um triângulo (76) para obtenção de um cone (KoTpc: conhecer que a revolução de um triângulo pode gerar um cone, o que ilustra um conhecimento procedimental associado à realização de uma revolução (KoTp: conhecer como obter o resultado da revolução de uma figura plana (triângulo e círculo) por um eixo não perpendicular ao plano dessa figura). Além disso, ao discutirem quais as características dos triângulos que permitem formar um determinado tipo de cone por meio da revolução – retângulo ou não –, revelam conhecer a implicação do uso de determinados tipos de triângulos para o tipo de cone obtido por essa revolução, mas consideram, de forma errônea, que só existem cones formados por triângulos retângulos (82). Conhecem a classificação de triângulos quanto aos ângulos (79; 81; 82) – retângulo (KSMau: conhecer a classificação dos triângulos quanto aos ângulos) e quanto aos lados (83) – isósceles (KSMau: conhecer a classificação de triângulos pelos lados).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os futuros professores revelam conhecer exemplos de figuras que podem ser rotacionadas – quadrados e triângulos –, bem como as características do resultado da rotação destas figuras, e conhecimento sobre notações usadas para representar a rotação destas figuras. Para rotações no espaço, revelam conhecer exemplos de figuras que podem ser rotacionadas – cubos – e sobre a origem da rotação – formado por retas –, o que ilustra as diferenças entre rotações no plano e no espaço.

Podemos apresentar o conhecimento revelado ao responderam as duas questões motivadoras de forma sintética, de modo a permitir obter uma visão mais ampla do espectro desse conhecimento e que nos permite responder à questão de pesquisa relativa a que conhecimento especializado revelam futuros professores no âmbito da rotação e revolução de figuras geométricas.

Tabela 1. Síntese do conhecimento especializado revelado pelos futuros professores

	Conhecimento revelado	
Categoria	*Tópico de rotação*	*Tópico de revolução*
KoT Definition	KoTd: conhecer exemplos de rotação de figuras planas no plano KoTd: conhecer exemplos de rotação no espaço de figuras espaciais	KoTd: reconhecer que paraboloides e hiperboloides são figuras que podem ser formadas por meio de revolução
KoT Procedures	KoTpc: conhecer o resultado da rotação de 60º de um triângulo equilátero no plano. KoTpc: conhecer o resultado da rotação de 45º de um quadrado no plano.	KoTpc: conhecer que a revolução de um triângulo pode gerar um cone. KoTpc: conhecer que a revolução de um círculo pode gerar uma esfera.
KoT Register of Representation	KoTr: conhecer uma notação para representar os vértices correspondentes de figuras planas em uma rotação no plano KoTr: conhecer uma notação para representar o movimento de giro em uma rotação no plano.	-
KoT Properties	KoTp: conhecer que a rotação possui uma origem, e que em rotações no espaço ela é constituída por uma reta	-
KSM Auxiliary conections	-	KSMau: conhecer a classificação dos triângulos por ângulos. KSMau: conhecer a classificação de triângulos pelos lados.
KPM Ways os proceeding	KPMwp: conhecer que ao unir os vértices das imagens iniciais e finais de figuras planas regulares rotacionadas obtemos nova figura regular com o dobro de vértices.	-

Estes resultados contribuem para repensar e problematizar o foco da formação de professores, trazendo para a discussão as especificidades desse conhecimento para a prática docente. Repensar o foco e natureza da formação associa-se à conceitualização de Tarefas para a Formação (Ribeiro et al., 2021) que potenciem desenvolver este conhecimento na sua dimensão especializada.

Também, esta análise e resultados abrem outras linhas de trabalho relacionadas com o conhecimento de futuros professores e que podem ser descritas pelas questões de pesquisa:

(i) Quais são os elementos necessários para realizar uma rotação de figuras geométricas?
(ii) Quais são os elementos necessários para realizar uma revolução de figuras geométricas?

Referências

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 567-587.

Delmondi, N. N., & Pazuch, V. (2018). Um panorama teórico das tendências de pesquisa sobre o ensino de transformações geométricas. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, *99*(253), 659-686.

Dolce, O., & Pompeo, J. N. (1995). Fundamentos de matemática elementar. *Geometria plana*, *9*, 252.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores.

Lorenzato, S. (1995). Porque ensinar geometria. *Revista em Educação Matemática*, (4).

Rezende, E. Q. F., & de Queiroz, M. L. B. (2008). *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Editora da UNICAMP.

Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. Perspectivas da Educação Matemática, 14(35), 1-32.

Ribeiro, M., Gibim, G., & Alves, C. (2021). A Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: Discussão de Tarefas para a Formação e o Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(34), 1-24.

Stake, R. (2005). Qualitative case studies. *The Sage handbook of qualitative research (3th edition, pp. 443–466) SAGE Publications Ltd.*

Wagner, E., & Carneiro, J. P. Q. (2007). *Construções geométricas*. Sociedade Brasileira de Matemática.

Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2019). Mathematics teachers' specialized knowledge: a secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, *21*(1), 25-42.