

EL KOT DEL PROFESOR ACERCA DE FUNCIÓN CUADRÁTICA: DISEÑO DE UN CUESTIONARIO PARA INVESTIGACIÓN

Teacher's knowledge of topics of quadratic function: Design of an instrument for research

Rojas-Seals, V.^a y Espinoza-Vásquez, G.^b

^aUniversidad de Concepción; ^bUniversidad Alberto Hurtado

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas.

Resumen. En el estudio del KoT, los cuestionarios se muestran como una herramienta útil para acceder a este subdominio. Este trabajo pretende mostrar el proceso de construcción de un cuestionario para acceder al KoT sobre la función cuadrática. Se presentan las etapas de su construcción y las estrategias para el diseño de las preguntas para abarcar todas las categorías de este subdominio. Como resultado se tiene un instrumento con 12 ítems validado por expertos en matemática y en el modelo MTSK.

Palabras clave. Función cuadrática, educación secundaria, conocimiento de los temas, construcción de cuestionarios.

Abstract. In the KoT study, questionnaires are shown as a useful tool to access this subdomain. This work aims to show the process of building a questionnaire to access the KoT on the quadratic function. The stages of its construction and the strategies for the design of the questions are presented to cover all the categories of this subdomain. As a result, we have an instrument with 12 items validated by experts in mathematics and in the MTSK model.

Keywords. Quadratic function, secondary education, knowledge of topics, questionnaire building

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

Este trabajo se enmarca en el desarrollo de una tesis de magister que aborda la función cuadrática, estudiada desde la perspectiva del MTSK, centrándose en el Conocimiento de los Temas (KoT). La motivación de este estudio proviene de dos fuentes: el propio objeto matemático *función cuadrática* y el interés por profundizar en el conocimiento del profesor. Al respecto, un avance en esta línea es el trabajo titulado "Análisis del espacio de trabajo matemático personal e idóneo de profesores frente al concepto de función cuadrática" (Céspedes, Del Pino y Rojas, 2019), abordado desde el constructo del Espacio de Trabajo Matemático ETM (Kuzniak, 2011), en donde se estudió el quehacer matemático (ETM personal) de tres profesores en ejercicio, comparándolo con su propuesta de enseñanza (ETM idóneo potencial). Según Kuzniak (2011), el ETM personal corresponde a la organización del conocimiento matemático para abordar una tarea, mientras que el ETM idóneo es la organización que hace el profesor sobre los aspectos matemáticos de un tema para que sus estudiantes puedan comprometerse con determinadas tareas. La condición de potencial se refiere a la etapa previa a la enseñanza efectiva.

Los resultados en el trabajo de Céspedes *et al.* (2019) muestran que los profesores hacen uso de su ETM personal al enseñar la función cuadrática y no realizan diferencias significativas entre éste y su ETM idóneo potencial cuando diseñan situaciones de enseñanza para este objeto, quedando estrechamente relacionado el conocimiento que

tiene el profesor sobre la función cuadrática a su propuesta de enseñanza. En este mismo sentido, y de acuerdo con la actual priorización curricular en el currículum chileno (MINEDUC, 2020), la función cuadrática cobra relevancia al tratarse de una parte esencial para ser trabajado en el nivel segundo medio (15-16 años), por tanto, se espera que el profesor conozca y domine dicho tema.

En otras investigaciones en torno al conocimiento especializado del profesor de matemática es posible encontrar trabajos centrados en Álgebra y en funciones (e.g. Vasco, Climent, Escudero-Ávila, Montes y Ribeiro, 2016; Espinoza-Vázquez, Zakaryan y Carrillo, 2018), así como en la parábola (e.g. Lara, 2016; Del Río, 2018; Advíncula, Beteta, León, Torres y Montes, 2021), sin embargo, a la fecha no se han realizado estudios con foco en la función cuadrática. Pese a ello, este objeto ha sido estudiado desde otras perspectivas. Por ejemplo, Hau-Yon y Zapata (2019), investigan el conocimiento didáctico del contenido sobre la función cuadrática en estudiantes para profesor de matemática. Por su parte, Escudero (2017) utiliza el modelo de conocimientos didácticos matemáticos (CDM) para mostrar conocimientos del profesor de matemática que son necesarios para el trabajo algebraico con funciones lineales y cuadráticas.

Por otro lado, Almonacid (2018) estudia el ETM personal de estudiantes de humanidades en la modelización de funciones cuadráticas, así como Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) estudian las dificultades de estudiantes de ingeniería al articular registros gráficos y algebraicos de funciones lineales y cuadráticas. Estas últimas investigaciones son parte de los antecedentes sobre el conocimiento de los estudiantes que podremos esperar al momento de estudiar el conocimiento especializado en relación a la función cuadrática.

En el ámbito de las investigaciones con MTSK, Carrillo (2020) destaca que la tarea de describir en profundidad los subdominios y categorías del MTSK está entre los desafíos propuestos para avanzar con el desarrollo del modelo, así como aplicar el modelo a diferentes temas y diseñar cuestionarios que permitan acceder y profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas. En esta línea, respecto al diseño de cuestionarios, Advíncula *et al.* (2021) notan que, en general, el proceso de desarrollo de los instrumentos para obtener información no es transparente para el lector y que no existe una sistematización en el diseño de estas herramientas que recogen información en trabajos relacionados a explorar el conocimiento de profesores de matemática. Por ello se proponen explicitar con detalle la elaboración de un cuestionario basado en el MTSK para indagar conocimiento acerca de la función cuadrática y, además, dar algunas pautas para el diseño de cuestionarios que puedan ser utilizadas independiente del tema, como la importancia de profundizar en el conocimiento del objeto matemático y la triangulación tanto de los investigadores como por parte de expertos externos.

Ante lo anterior, en este escrito pretendemos compartir el proceso de creación de un cuestionario que permitiese acceder al conocimiento del profesor sobre la función cuadrática desde la perspectiva del KoT. Asimismo, compartimos los instrumentos resultantes con el fin de fijar pautas y elementos comunes que puedan ser de ayuda para futuras investigaciones.

MARCO DE REFERENCIA

Nuestro referente teórico es el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*, Carrillo *et al.*, 2018), que se presenta como un modelo analítico para estudiar el conocimiento del profesor, que pretende ayudar a comprender cómo funciona y se estructura el conocimiento del profesor de matemática (Vasco *et al.*, 2016).

El MTSK se compone de los dominios de conocimiento: *Mathematical Knowledge* (MK) y *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), cada uno con tres subdominios. El modelo también contempla las creencias del profesor sobre la matemática, sobre la enseñanza y sobre el aprendizaje de ésta como elementos que inciden en el conocimiento del profesor y sus prácticas.

El MK incluye los subdominios de conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). Por su parte el PCK incluye los subdominios de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

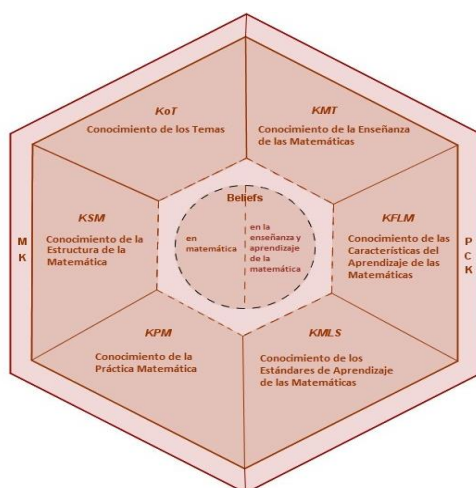


Figura 1. Modelo MTSK

Debido a que nuestro objetivo es indagar en el subdominio KoT, definiremos brevemente este subdominio y sus categorías.

Según Carrillo *et al.* (2018), el KoT describe qué y de qué manera conoce el profesor de matemática el tema que enseña, es decir, conocimiento en detalle del contenido matemático y su significado. Este subdominio incluye lo que el estudiante debe aprender, aunque posee más profundidad, formalidad y rigurosidad.

Las categorías que permiten describir este subdominio son Fenomenología y aplicaciones, es decir, conocimiento de situaciones y modelos que se atribuyen a un tema así como sus usos y aplicaciones; Definiciones, propiedades y fundamentos, en la que se incluye la elección pertinente de propiedades para caracterizar objetos matemáticos y sus definiciones alternativas; Procedimientos asociados a un tema, es decir, conocimiento de cómo, cuándo y por qué hacer algo en particular, algoritmos, sus condiciones y principios; y, por último, Registros de representación pertinentes al tema, por ejemplo gráfico, algebraico, aritmético, pictográfico, en lenguaje natural.

Incluimos, además, el conocimiento de ciertos ejemplos en la categoría de Fenomenología y aplicaciones, entendiendo el rol de los ejemplos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y su capacidad de dar cuenta respecto a la calidad y riqueza del KoT del profesor (Liñan, Contreras y Barrera, 2016).

CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO

Una de las primeras etapas en la construcción de un instrumento que nos permitiese obtener información a cerca del conocimiento del profesor sobre la función cuadrática fue la realización de un estudio sobre este objeto con el fin de conseguir la sensibilidad

teórica (Strauss y Corbin, 2002). En este sentido, el análisis del objeto desde la perspectiva matemática, y a la luz de las categorías del KoT, permitió perfilar qué tipo de conocimiento se esperaba evidenciar como parte del conocimiento especializado y generar las preguntas del cuestionario.

De acuerdo con Fernández (2007), las etapas de construcción del cuestionario parten por la delimitar el tema, que en este caso es la función cuadrática como incluida en las bases curriculares chilenas (MINEDUC, 2020). La siguiente etapa consistió en redactar preguntas. Para ello se partió de las definiciones de las categorías del KoT, las que se relacionaron al análisis ya realizado del objeto. Se trata de preguntas abiertas que buscan que el profesor informante pueda desarrollar libremente la respuesta y proporcionar la mayor cantidad de información sobre el aspecto específico del tema.

Tabla 1: Categorías del KoT asociadas a cada pregunta del cuestionario.

Categorías	Aspecto de la función cuadrática	Preguntas
Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Definición de la función cuadrática, de conceptos relacionados a ella y sus relaciones.	1, 3, 6, 7, 8, 12
	Definición en lenguaje natural a partir de lo simbólico.	
	Propiedades del dominio y recorrido	
	Inyectividad y epiyectividad de la función	
	Función inversa	
	Puntos en que la gráfica de la función cuadrática intersecta ambos ejes coordenados	
	Interpretación de los parámetros a , b y c de la forma algebraica sobre el dominio y recorrido.	
Registros de Representación.	Soluciones de $f(x) = k$.	2, 3, 4, 5, 6
	Puntos $(x, f(x))$ necesarios para determinar la forma algebraica de $f(x)$ cuadrática.	
	Concavidad, máximos y mínimos en todo o parte de su dominio.	
	Representaciones y notaciones usuales.	
	Identificar la forma algebraica y gráfica.	
	Definición en lenguaje natural a partir de lo simbólico.	
	Transformaciones entre registros de representación.	
Procedimientos.	Identificar eje de simetría.	4, 5, 6
	Identificar gráfico de la función	
	Elementos relevantes de la gráfica de la función.	
	Puntos de intersección con los ejes coordenados	
Fenomenología y Aplicaciones.	Procedimientos asociados a transformaciones de registros de representación.	9, 10, 11
	Determinar el eje de simetría.	
	Determinar a partir del registro gráfico cartesiano si corresponde a una función cuadrática	
	Determinar dominio y recorrido, imagen y pre imagen	
	Fenómenos reales que se pueden modelar mediante una función cuadrática.	
	Ejemplos “clásicos” sobre función cuadrática	

Nota: Fuente propia de la investigación.

Posteriormente, el proceso de revisión de las preguntas nos condujo a clasificarlas de acuerdo a las categorías del KoT y precisar si se trataba de conocimiento de Definiciones o Propiedades en el caso de la categoría Definiciones, propiedades y sus fundamentos. La Tabla 1 muestra la clasificación de los ítems según las categorías del KoT y los aspectos de la función cuadrática a la que se refiere cada uno. Esta clasificación permitió observar relaciones preliminares entre los Registros de representación y los Procedimientos, al encontrar estos últimos en la producción de ciertas representaciones o transformaciones entre ellas. El proceso de refinamiento de las preguntas da como resultado un cuestionario con 12 ítems, algunos de ellos con diferentes secciones. Debido a que se busca indagar en todas las categorías del KoT, no fue posible acortar la extensión del cuestionario.

Validación e Implementación piloto

Una vez finalizado el cuestionario, se invitó a dos expertos en el modelo MTSK y a un matemático profesional a revisar la pertinencia de las preguntas y si ellas eran coherentes con la categoría y aspecto de la función cuadrática que se esperaba conseguir. A estos revisores se les hizo llegar, junto con el cuestionario, una tabla de especificaciones de las preguntas (Tabla 2 anexa). En esta tabla se incluye el número de la pregunta, la categoría a la que se alude y el aspecto de la función cuadrática que se quiere indagar. Los tres revisores estuvieron de acuerdo con la categorización y los objetivos de las preguntas. Los comentarios y sugerencias de los tres revisores fueron menores y se consideraron para hacer los ajustes respectivos.

Durante el proceso de validación y calibración de las preguntas, para ver si estas apuntaban y permitían recoger información sobre conocimientos en las categorías específicas, se realizó una aplicación piloto con dos profesores que imparten clases en el nivel donde se enseña la función cuadrática. El cuestionario fue completado por los profesores en menos de 100 minutos, lo que permitió establecer el tiempo estimado para responder. Luego de esta implementación se sostuvo una conversación con los profesores para obtener sus apreciaciones respecto de la redacción de las preguntas, el tiempo necesario para responder y los aspectos que se pudiesen incluir o eliminar de la función cuadrática. Estos comentarios fueron considerados para ajustar los tiempos y modo de aplicación final, pues no se propusieron modificaciones a las preguntas.

COMENTARIOS FINALES

Como parte de los resultados del piloto, se pudo observar que los ítems permiten acceder al conocimiento de las categorías del KoT contempladas, sin embargo, al tratarse de preguntas abiertas, puede ser necesaria una entrevista posterior para confirmar presencia de conocimiento especializado en las respuestas de los informantes.

La elaboración de cuestionarios requiere de profundizar, como investigador, en el tema de modo que, según el objetivo trazado, sea posible acceder al conocimiento del profesor. En este caso se contempló el acceso al KoT, sin embargo, creemos que es posible diseñar cuestionarios para los otros subdominios, en tanto se tengan definiciones precisas de sus categorías y una operacionalización del modelo al tema de estudio.

Referencias

- Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021) El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia*, 35(1), 190-209. doi: 10.15359/ru.35-1.12
- Almonacid, A. (2018) *Modelización de Funciones Cuadráticas. Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de humanidades*. (Tesis de Magíster). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

- Carrillo, J. (2020). Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva, Huelva.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. doi: 10.1080/14794802.2018.1479981
- Céspedes, F., Del Pino, N. y Rojas, V. (2019). *Análisis del espacio de trabajo matemático personal e idóneo de profesores frente al concepto de función cuadrática*. (Tesis de pregrado). Universidad de Concepción, Concepción.
- Escudero, P. (2017) *Identificación de conocimientos didáctico-matemáticos, en la faceta epistémica, del profesor de educación secundaria, sobre funciones lineales y cuadráticas*. (Tesis de Magíster). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *UNION*, (41), 20-38.
- Del Río, C. (2018). *La parábola como objeto matemático desde el enfoque ontosemiótico en el curso de Matemáticas de grado décimo del Instituto Mistrató Risaralda* (Tesis de Maestría), Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.
- Espinoza-Vázquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(3), 301- 324. doi: 10.12802/relime.18.2133
- Fernández, L. (2007). ¿Cómo se elabora un cuestionario? *Butletí LaRecerca*, 8, 1-9. <http://www.ub.edu/idp/web/sites/default/files/fitxes/ficha8-cast.pdf>
- Hau-Yon, F. y Zapata, M. (2019). Conocimiento didáctico del contenido de la función cuadrática en estudiantes para profesor de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*. SEIEM, Valladolid.
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.
- Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: Una formación continua de profesores de profesores basada en la teoría de registros de representación semiótica* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- Liñan, M.M., Contreras, L.C. y Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. Seminario llevado a cabo en Huelva, España.
- MINEDUC. (2020). *Priorización Curricular Matemática*. Santiago, Chile. <https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/177735:Priorizacion-Curricular-Matematica-1-basico-a-4-medio>
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada* (Trad. Eva Zimmerman). Editorial Universidad de Antioquia.
- Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, Río Claro (SP)*, 30(54), 222-239. doi: 10.1590/1980-4415v30n54a11

Apéndice: Categorías del KoT asociadas a cada pregunta del cuestionario.

Pregunta	Categorías	Aspecto de la función cuadrática
1	1.1	Definiciones, Propiedades y Fundamentos. Definición de la función cuadrática y de conceptos relacionados a ella.
	1.2	Definiciones, Propiedades y Fundamentos. Relaciones entre los conceptos definidos.
	1.3	Definiciones, Propiedades y Fundamentos. Definir la función cuadrática.
2	Registros de Representación.	Diferentes representaciones y notaciones de la función cuadrática.
3	Registros de Representación; Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Identificar la función cuadrática de forma algebraica y gráfica.
		Definición en lenguaje natural a partir de lo simbólico.
4	a) Registros de Representación; Procedimientos.	Transformar el registro de gráfico cartesiano a otros. Procedimientos asociados a transformaciones de registros de representación.
	b) Registros de Representación; Procedimientos.	Determinar la existencia del eje de simetría en el registro gráfico de la función cuadrática. Procedimientos asociados a determinar el eje de simetría.
5	a) Registros de Representación; Procedimientos.	Determinar a partir del registro gráfico cartesiano si corresponde a una función. Procedimientos asociados a determinar si la gráfica corresponde a una función.
	b) Registros de Representación	Determinar a partir del registro gráfico cartesiano si corresponde a una función cuadrática.
6	a) Procedimientos.	Determinar dominio de una función cuadrática
	b) Procedimientos.	Determinar recorrido de una función cuadrática.
	c) Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Propiedades involucradas al determinar dominio y recorrido de la función.
	d) Procedimientos.	Determinar imagen a partir de una pre-imagen.
	e) Procedimientos.	Determinar la pre-imagen a partir de una imagen
	f) Definiciones, Propiedades y Fundamentos; Procedimientos asociados.	Propiedad de inyectividad de una función cuadrática y los procedimientos asociados a ella.
	g) Definiciones, Propiedades y Fundamentos al determinar si la función es epiyectiva; Procedimientos asociados.	Propiedad de epiyectividad de una función cuadrática y los procedimientos asociados.

	h)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos al determinar si la función posee inversa.	Propiedad de inversa de la función cuadrática.
	i)	Registros de representación; Procedimientos.	Transformaciones entre registros algebraico, gráfico y otros. Procedimientos asociados a dichas transformaciones.
	j)	Registros de Representación.	Elementos relevantes de la gráfica de la función cuadrática.
	k)	Procedimientos; Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Puntos en que la gráfica de la función cuadrática intersecta ambos ejes coordenados.
7	a)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Interpretación de los parámetros a , b y c de la forma algebraica de la función cuadrática.
	b)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Incidencia de dichos parámetros en dominio, recorrido y representación gráfica de la función cuadrática.
8	a)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Ecuación y solución de la ecuación $f(x) = k$, con $f(x)$ cuadrática.
	b)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Soluciones de $f(x) = k$, con $f(x)$ cuadrática.
	c)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos.	Puntos $(x, f(x))$ necesarios para determinar la forma algebraica de $f(x)$ cuadrática.
9		Fenomenología y Aplicaciones.	Fenómenos reales que se pueden modelar mediante una función cuadrática.
10		Fenomenología y Aplicaciones.	Ejemplos “clásicos” sobre función cuadrática.
11		Fenomenología y Aplicaciones.	Modelo cuadrático que permite modelar una situación.
12	a)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos. Procedimientos asociados.	Concavidad, máximos y mínimos de una función cuadrática en todo su dominio.
	b)	Definiciones, Propiedades y Fundamentos. Procedimientos asociados.	Concavidad, máximos y mínimos de una función cuadrática en un dominio acotado.

Nota: Fuente propia de la investigación. En la categoría “Definiciones, Propiedades y Fundamentos” se ha destacado la palabra “Propiedades” cuando la pregunta del cuestionario apunta exclusivamente a este aspecto de la categoría.