

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO QUE SE ESTUDIA EN EL DISEÑO DE UNA CLASE DE GEOMETRÍA

Pedagogical Content Knowledge evidenced in the design of a geometry class

Villella, J.^a; Fioriti, G.^b; Ferragina, R.^c; Güerci, V.^d; Lupinacci, L.^e; Bifano, F.^f; Almirón, A.^g

a; b; c; d; e; f; g Centro de Estudios en Didácticas Específicas-Laboratorio de Investigación en Ciencias Humanas, Universidad Nacional de San Martín, Argentina.

Temática: 1 – MTSK en la formación docente.

Resumen. El conocimiento didáctico matemático es nodal para organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, utilizar diferentes métodos y recursos, entender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. En este trabajo lo analizamos junto con un docente que prepara una clase de geometría para estudiantes de escuela secundaria. Usamos el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) para connotar los hallazgos de una investigación colaborativa. Concluimos que MTSK permite caracterizar la enseñanza como una actividad situada, interpelar su sentido, desnaturalizar secuencias de aprendizaje, cuestionar producciones estudiantiles, comprender fenómenos didácticos en el aula.

Palabras clave. Prácticas de enseñanza, Geometría, PCK, MTSK.

Abstract. Pedagogical Content Knowledge is nodal for organizing teaching, designing learning tasks, using different methods and resources, understanding the factors that condition teaching and learning. In this work we analyzed it together with a teacher who prepares a geometry class for high school students. We use the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model (MTSK) to connote the findings of a collaborative research. We conclude that MTSK allows us to characterize teaching as a situated activity, to question its meaning, to distort learning sequences, to question student productions, to understand didactic phenomena in the classroom.

Keywords. Teaching Practice, Geometry, PCK, MTSK.

INTRODUCCIÓN

El conocimiento didáctico matemático docente resulta nodal para organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, utilizar diferentes métodos y recursos, entender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. Diversas investigaciones asocian el desarrollo profesional a la coherencia entre concepciones y práctica del aula (Kaiser y Li, 2011) y al conocimiento profesional (Bell, Wilson, Higgins y McCoach, 2010). En este estudio nos centramos en el aspecto cognitivo, para profundizar en la reflexión sobre la práctica. Asumimos que los saberes matemáticos permiten a las y los docentes planificar, gestionar y reflexionar sobre la enseñanza. Compartimos los resultados de una investigación referenciada en el MTSK (Carrillo et al, 2018) y la investigación colaborativa (Bednarz, 2004), sobre un profesor de matemática de escuela secundaria, cuando diseña una clase de geometría.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo con Carrillo y colaboradores (2018), el carácter especializado del conocimiento del profesor se fundamenta a través de la integración y las relaciones entre conocimientos de los subdominios que conforman el MTSK. Como afirman Scheiner et al. (2017), esta especialización permite considerar la génesis y el desarrollo de las ideas matemáticas desde una perspectiva histórica y cognitiva, con relación a las y los estudiantes con los cuales serán trabajadas. Las creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje permean el conocimiento docente y ubican este dominio en el centro del modelo MTSK junto con otros dos dominios con los que analizar el diseño de clase de un profesor: el Conocimiento Matemático (MK: Mathematical Knowledge) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK: Pedagogical Content Knowledge).

En este trabajo, nos apoyamos en el PCK para analizar distintas estrategias de enseñanza del contenido, de la potencialidad de estas estrategias y de los recursos que se pueden utilizar para lograr aprendizaje matemático (Tabla 1).

Tabla 1. PCK (subdominio y categorías) usado en esta investigación. Fuente propia.

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento didáctico del contenido (PCK)	Conocimiento de la enseñanza de la geometría (KMT)	Teorías de enseñanza de la geometría Recursos de enseñanza Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de las características del aprendizaje de la geometría (KFLM)	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de la geometría Interacción estudiante- geometría plana Intereses y expectativas del aprendizaje de la geometría
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de la geometría (KMLS)	Contenidos a enseñar: circunferencia y círculo Nivel de desarrollo esperado Secuenciación de los temas

Buscamos evidencias del conocimiento didáctico del contenido en el diseño de una actividad de geometría para estudiar circunferencia y círculo, realizada por un docente. En concordancia con Flores (2015) entendemos por evidencia a un elemento que nos permite afirmar la presencia de conocimiento (profundo o superficial) en el docente y por indicio a la sospecha de existencia de conocimiento, identificada por alguna acción docente. Consideramos la modelización del espacio de forma analógica y geométrica, para establecer conexiones entre el mundo sensible y un modelo del mismo, con diferentes niveles de formalización (Villega, et al., 2018). Esta modelización puede hacerse en diferentes ambientes para el aprendizaje que invitan a las y los estudiantes a involucrarse en la exploración y la explicación (Skovsmose, 1999). Elegimos enmarcar nuestra búsqueda en el paradigma de la investigación colaborativa (Bednarz, 2004) para producir conocimiento relevante sobre la práctica profesional, recuperar la voz docente y las actividades para la clase, como una legítima forma de encontrarle sentido a la experiencia de enseñar.

METODOLOGÍA

Este trabajo corresponde a una investigación de corte cualitativo e interpretativo por medio de un estudio de caso, donde se busca comprender el conocimiento didáctico del contenido en un profesor, cuando diseña una clase de geometría para estudiantes de 12-13 años (Stake,

2007). Lo relatado, se corresponde con sesiones de trabajo en videoconferencias, mantenidas durante el 2020, entre el grupo investigador (en adelante GI) y Javier (por su seudónimo).

Epistemológicamente, la construcción del conocimiento didáctico docente, se fundamenta en la reflexión sobre las situaciones de enseñanza: el investigador “dialoga” con el docente desde el interior del contexto en que éste opera, para entender e interpretar cómo fundamenta e implementa sus decisiones. Así, comenzamos nuestra investigación con una entrevista a Javier (profesor de matemática egresado de un Instituto de Formación Docente con plan de 4 años) que trabaja desde 2018 en esta institución (su primera y única escuela de trabajo). Esta entrevista, fue un espacio recíproco de argumentación generado a partir de discusiones sobre cómo, cada uno (GI-Javier), otorga significados a la enseñanza y dota de sentido a la co-construcción de un conocimiento. Durante las interacciones, Javier analizó las dimensiones de su experiencia y cuestionó sus conocimientos, al cruzarlos con los que le aportó el GI desde la óptica del MTSK.

RESULTADOS

Compartimos los primeros resultados de la investigación. Nos basamos en extractos de algunas de las sesiones de trabajo entre el GI y Javier.

En la **sesión 1**, le pedimos a Javier que elabore un esquema que muestre las conexiones y relaciones entre los elementos que usa para planificar sus clases. Nos basamos en la idea de recurso en sentido amplio (Adler, 2010): repertorio de elementos usados para organizar, pensar, planificar y gestionar la clase, vinculado con el conjunto de conocimientos, saberes, creencias y prácticas que Javier posee respecto de la enseñanza. Su esquema de recursos (Gueudet y Trouche, 2012) mostró distintos tipos que se fusionan en el uso de los tecnológicos. Javier referenció la actividad en el contexto de trabajo de sus estudiantes: indicio de cuál puede ser su organización de la clase, qué estrategias despliega y qué tipo de tareas propone.

- GI: ¿Cuál es el contenido sobre el que vas a trabajar?
- J: Superficie de figuras circulares
- GI: ¿Por qué ese tema?
- J: Está en el Diseño curricular, lo puse en la planificación. Por lo que le escuché al profe de uno de una de las actividades extracurriculares, se va a usar en proyectos de electricidad. Están analizando tipos y dimensiones de los cables...

En la **sesión 2**, trabajamos sobre el conocimiento del contenido. Javier aportó un material que sus estudiantes le compartieron (Figura 1).

Nos cuesta imaginar un mundo sin cables eléctricos. Los primeros fenómenos de naturaleza eléctrica fueron observados por el filósofo griego Tales de Mileto (600 a.c.) y recién en el año 1780, Alejandro Volta descubrió que para generar electricidad se requerían de metales conductores. Los primeros “cables” eran gruesas placas de cobre. El tiempo y la practicidad, hicieron reducir el tamaño y llegar a los cables que hoy conocemos. La foto muestra algunos de los cables actuales. Todos, deben contener conductos con tres cables para conectar ambos polos y la descarga a tierra.



Figura 1. Material aportado por Javier al encuentro.

Lo leímos y dialogamos sobre su contenido, el conocimiento que él tiene respecto del mismo y cómo se le ocurría relacionar este texto con lo propuesto a enseñar:

- GI: ¿Lo que dice el texto en la última oración, es verdadero? ¿Es así?
- J: Sí. Yo lo estudié en la escuela secundaria. Soy egresado de una escuela que me formó como técnico electrónico. (Riéndose) ¡Algo de eso tengo que saber!
- GI: ¿Qué te imaginás como primera actividad, para hacer el puente entre lo que dice esta hoja de las y los estudiantes y lo que vas a enseñar?
- J: (Después de pensar un rato) Yo les propondría que analicen una figura que sirva como modelo de cable que se describe en el texto.
- GI: Una figura: ¿hecha por vos, de algún libro, de la web?
- J: No, hecha por mí, usando GeoGebra.
- GI: ¿Por qué?
- J: Que la haga yo me deja tranquilo, que lo que aparece es lo que quiero trabajar. Eso me da seguridad. Hacerla con GeoGebra, porque es más fácil.
- GI: ¿Y cuál sería esa figura?
- J: (abrió su Notebook y en pocos minutos mostró la imagen de la Figura 2)

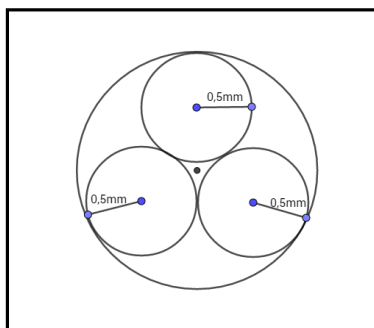


Figura 2. Imagen de la pantalla de la Notebook de Javier.

Javier evidencia conocimiento sobre: el GeoGebra como recurso, la modelización geométrica a través de la tecnología, el uso de figuras de análisis (KMT) y puede anticipar cómo los estudiantes accionarán contra el medio ofrecido que responde a sus intereses (KFLM) previendo una secuencia temática acorde con el nivel deseado de dominio del contenido geométrico seleccionado (KMLS). La pantalla da cuenta del MK y el uso de recursos tecnológicos (optamos por no trabajar en ellos en las sesiones siguientes)

En la **sesión 3** trabajamos sobre la figura y debatimos acerca de posibles actividades para el aula, con la intención de hacer emerger evidencias de KMT y KFLM.

- GI: ¿Qué actividad se te ocurre proponer usando esa figura como recurso?
- J: Puedo preguntarles ¿Qué parte del conducto está ocupada por los cables?
- GI: ¿Así, sin más?
- J: No entiendo.
- GI: ¿Hay alguna presentación por parte tuya, una contextualización de la actividad?

- J: Ah, claro. Primero les cuento que me llegó la hoja con los cables, después que se me ocurrió que debían usarlos para algo y entonces les planteo el problema.
- GI: ¿Por qué pensás que lo que estás planteando es un problema?
- J: Porque tienen que hacer cálculos, aplicar lo que saben de otros años...
- GI: ¿Y si no se acuerdan de cómo hacerlo?
- J: Los puedo orientar.
- GI: ¿Cómo?
- J: Con sugerencias.
- GI: (riéndose) y como decían nuestras abuelas con las lentejas: si quieren las usan y si quieren...
- J: (a carcajadas) las dejan, claro.
- GI: Pero si las dejan: ¿para qué las pensaste?
- J: Yo les doy un abanico de posibilidades... Después que cada cual diseñe su propio camino.
- GI: ¿No sería más práctico, dárselas sólo a las o los que te las piden?
- J: Prefiero que las tengan todos en la hoja de trabajo, y decidan ellos.
- GI: ¿Y cuáles serían esas sugerencias?
- J: (después de un rato de mirar su pantalla y jugar con el mouse haciendo que el cursor se deslice por sobre la figura). Les diría que reproduzcan el dibujo en la pantalla de GeoGebra, usen las herramientas y muevan las partes hasta encontrar la respuesta. ¡Ah!, en la hoja de trabajo les pondría: presten atención a las pistas que da el dibujo. Miren que la longitud del radio de los cables y el punto que marca la circunferencia que delimita al conducto son importantes. Además, deberán escribir cómo hallaron la respuesta y explicar por qué creen que esa, la mejor respuesta.

Javier se movió entre el ejercicio y la investigación, interesado en dotar a la actividad de cierta estructura cognitiva. En su secuencia didáctica prevé recuperar contenidos aprendidos por sus estudiantes a través de una guía de sugerencias (en algunos casos explícitas y dirigidas a la figura de análisis) organizando estas intervenciones en vistas a su guion de clase. Muestra indicios de organizar la clase en grupos de trabajo buscando homogeneizar, a través de ciertas técnicas por él aportadas, la participación estudiantil (KMT; KFLM). Se mostró más en su faceta de resolutor que de docente: explicita su forma de resolver el problema más que anticipar soluciones posibles de las y los estudiantes (KMLS). Para recuperar este foco de análisis, propusimos la **sesión 4**. En ella nos centramos en el análisis de supuestas respuestas de las y los estudiantes. Propusimos un análisis a priori de la situación de enseñanza para estudiar posibles decisiones respecto de la gestión de la clase. Así emergió la práctica matemática de Javier, sus formas de resolución para transponerlas al universo de sus alumnos (KoT, KSM, KPM).

- GI: ¿Cuál puede ser una posible respuesta que te den a tu propuesta?
- J: Me parece que lo que van a hacer, es abrir GeoGebra que les gusta y ponerse a probar.

- GI: ¿Suponés que van a aportar contenidos previos?, ¿Pueden consultar carpetas, libros o la web?
- J: Pueden usar lo que quieran. Aunque no lo digan con los términos geométricos exactos, puede que intenten copiar la figura usando circunferencia dado su centro y su radio, que conocen de otras clases.
- GI: Pero lo que esperás, es el uso de una propiedad. ¡Tu vara es muy alta!
- J: Bueno (dudando). También pueden tantear, pueden dibujar usando otras herramientas...pero me queda a mí el uso del zoom, del protocolo y del desplazamiento para mostrarles que quizás eligieron caminos erróneos.
- GI: ¿Mostrarles?
- J: Bueno, una forma de decir.
- GI: De decir, ¿qué?
- J: De demostrarles, sería.
- GI: ¿Demostrarles?...

Javier intercambia sus formas de resolución con las que supone ejecutarán sus estudiantes, poniendo en ellos dominio de contenidos de los cuales, no puede asegurar su existencia. La duda acerca de aplicar una propiedad o hacer tanteo, muestra cierto desconocimiento acerca de si la actividad propuesta es un ejercicio o un problema. Javier parece identificar mostración con demostración; prueba con ejemplificación. En la **sesión 5** en la que analizamos la sintaxis de los comandos como variable a tener en cuenta. Javier comenzó a dialogar con la herramienta en búsqueda de una posible solución al problema y propusimos analizar si a demanda del recurso, se mantenía la actividad o se proponía un ejercicio basado en la geometría. Reflexionar sobre ello fue el objetivo de la **sesión 6** en la que trabajamos otras posibles respuestas estudiantiles aportadas por el GI.

- GI: Quizás, algunos equipos, usando circunferencia por tres puntos, puedan presentar esta pantalla (Figura 3).

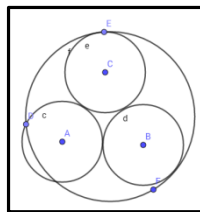


Figura 3. Imagen de la pantalla de la Notebook del GI.

- J: ¡Pero les quedó horrible la copia!...
- GI: ¿Qué sucedería en el aula si esta es una respuesta?
- J: Me imagino un diálogo con toda la clase, en la que yo pregunte ¿cómo hacemos las tres circunferencias y la que las contiene para que queden como en el cable? (dudando) No sé, quizás preguntaría, frente a la evidencia: ¿cómo se dibuja la circunferencia que delimita al conducto?
- GI: ¿Qué te pueden responder? ¿Qué esperarías como posible respuesta correcta?

- J: (trabajando en su máquina con el archivo compartido por GI). Yo propondría usar esa pantalla para analizar con el grupo completo, qué pasa si estudiamos el centro de la circunferencia.
- GI: ¿Sin que a ellas o a ellos se les ocurriera?
- J: Es una decisión que tomo yo para mostrarles un posible primer paso de nuestro análisis.
- GI: Ah, ¿y cómo se sigue?
- J: (usando el mouse, trabajando sobre las herramientas del programa, relatando en simultáneo) Podemos hallar el centro como intersección de las rectas que pasan por el punto medio del segmento que une a los centros de las circunferencias interiores y pasa por el centro que no pertenece a ese segmento. Es decir, estamos tomando en cuenta la existencia de un triángulo ABC al que le trazamos las medianas de sus lados (nos muestra ostensivamente su pantalla)
- GI: Interesante, pero: ¿al alcance de las y los estudiantes? ¿Es una oportunidad para el aprendizaje de lo que estás planeando? ...

Interpelamos a Javier desde su lugar de confort: el dominio del contenido geométrico e informático (MK) para hacerlo analizar su propuesta de tarea. Las intervenciones dan cuenta de un PCK en construcción. Las tareas parecen elegirse respetando algunas de sus propiedades, sin analizar en completo su potencialidad matemático- didáctica. Obviar en la selección, las posibles respuestas estudiantiles, implica omitir en el diseño la reflexión sobre el KMLS que en cierta forma modela el escenario para focalizar en el KFLM que se quiere lograr con el análisis del KMT.

CONCLUSIONES Y PROSPECTIVAS

Este trabajo nos permitió analizar lo que un profesor conoce sobre las posibilidades de enseñanza de la geometría, condicionadas por la naturaleza del contenido elegido (KMT). El análisis didáctico de las actividades diseñadas para el aula, nos permitió trabajar sobre el conocimiento de las propiedades del contenido matemático seleccionado como objeto de aprendizaje, interpelar su sentido, desnaturalizar secuencias de aprendizaje, cuestionar cogno-afectivamente las producciones matemáticas de las y los estudiantes, mejorar la comprensión de los fenómenos didácticos que se dan en el aula, generar conocimiento especializado. Nos adentramos en el conocimiento sobre las características de aprendizajes derivados de las posibles interacciones de las y los estudiantes con ese contenido elegido (KFLM). Reflexionamos acerca de qué cree el profesor deberían aprender sus estudiantes, con qué nivel de detalle desarrollar cada contenido, cómo relacionar lo nuevo a aprender con lo ya aprendido (KMLS). A través del análisis de las tareas, pudimos caracterizar cómo un profesor facilita la comprensión matemática cuando selecciona el ejemplo apropiado y proporciona una tarea desafiante determinada por el conocimiento especializado que posea (KMT). En un ambiente centrado en la reflexión sobre estrategias de enseñanza que permitan obtener información del pensamiento de los estudiantes, logramos caracterizar la práctica docente como una actividad que genera conocimiento profesional en forma paralela a su existencia, como una acción compleja y conjunta donde se intercambian sentidos e intencionalidades de enseñanza y sentidos y posibilidades de aprendizaje (PCK). Los diálogos, nos muestran cómo MTSK permite disgregar el conocimiento con propósitos

analíticos, y caracterizar la enseñanza como una actividad situada, en la que la puesta en acto de conocimientos, procesos y habilidades docentes, le otorga visos de una actuación profesional. El registro de lo actuado, la discusión de lo anotado, el intercambio de puntos de vista sobre los pasos dados, pone en evidencia la necesidad de conocer en profundidad los temas de geometría que se están usando y las decisiones didácticas que focalizan en el análisis del rol de estudiantes como productores de conocimientos matemáticos en los distintos niveles de enseñanza: elementos con los que continuaremos indagando sobre el PCK de Javier a través de otro tipo de dispositivos.

Reconocimientos

Este trabajo es parte del proyecto PICT-2019-03051 radicado en el LICH-UNSAM-CONICET. Los autores son miembros de la red iberoamericana MTSK.

Referencias

- Adler, J. (2010). La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. En G. Gueudet y L. Trouche (dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, 23-39. Rennes: Presses Universitaires de Rennes.
- Bednarz, N. (2004). Collaborative Research and Professional Development of Teachers in Mathematics. En M. Niss, E. Emberg (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education*, 4-11 July 2004. Copenhagen, Denmark.
- Bell, C., Wilson, S., Higgins, T. y McCoach, D. (2010). Measuring the Effects of Professional Development on Teacher Knowledge: The Case of Developing Mathematical Ideas. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(5), 479-512.
- Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). *The mathematics teacher's Specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la concepción de elementos del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK* (Tesis doctoral, Universidad de Huelva). <http://hdl.handle.net/10272/11503>
- Gueudet, G. y Trouche, L. (2012). Teachers' work with resources: Documentational geneses and professional geneses. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (eds.), *From text to "lived" resources. Mathematics curriculum materials and teacher's development*, 23-42. Dordrecht: Springer.
- Kaiser, G. y Li, Y. (2011). Reflections and future prospects. En Y. Li y G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction. An international perspective*, 343-353. New York: Springer.
- Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, J.D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. (2017). What makes mathematics teacher knowledge Specialised? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 37, 270. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Skovsmose, Ole (1999) *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Bogotá: Una empresa docente.
- Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.
- Villella, J; Fioriti, G; Ferragina, R; Lupinacci, L; Bifano, F; Almirón, A. (2018). A professional development experience in Geometry for High School teachers: introducing teachers to Geometry workspaces. En Herbst, P; Cheah, U; Jones, K; Richard, P. (eds), *International Perspectives on the teaching and learning of Geometry in secondary schools*, 197-214. Cham: Springer.