

LAS FRACCIONES EN EL MARCO DEL CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS

Fractions in the framework of knowledge of the topics

Prieto G. ^a; Perdomo A. ^b; Parra-Sandoval H. ^c

^a Universidad del Zulia; ^b Universidad Tecnológica del Perú; ^c Universidad del Zulia

Temática: MTSK en la formación de profesores

Resumen. En coherencia a lo planteado sobre el Conocimiento de los Temas (KoT) en el MTSK, se hace indispensable que los profesores en formación y los que ya laboran, comprendan en profundidad el tema de las fracciones. Se muestran los resultados del análisis de la participación de un grupo de profesores de primaria en un episodio de un programa de formación en el que se abordó la conceptualización de la fracción. El enfoque metodológico fue de carácter naturalista, esperando analizar las situaciones tal y como sucedieron. Los resultados mostraron un arraigo muy fuerte de los profesores por concebir la fracción como parte – todo, evidenciándose una gran ausencia de los otros significados de las fracciones. Estos resultados exigen la necesidad de ampliar en los procesos formativos la comprensión de los otros significados de la fracción.

Palabras clave. Conocimiento de los temas, Desarrollo profesional, Fracciones, MTSK

Abstract. Consistent with what is stated about Knowledge of Themes (KoT) in the MTSK, it is essential that teachers in training and those who already work, understand in depth the subject of fractions. The results of the analysis of the participation of a set of primary school teachers in an episode of a training program in which the conceptualization of the fraction was addressed are shown. The methodological approach was of a naturalistic nature, hoping to analyze the situations as they happened. The results showed a very strong attachment of these professors for conceiving the fraction as part - whole, evidencing a great absence of the other meanings of the fractions. These results demand the need to broaden the understanding of the other meanings of the fraction in the formative processes.

Keywords. Subject Knowledge, Professional Development, Fractions, MTSK

INTRODUCCIÓN

El estudio sobre el conocimiento del profesor ha sido motivo de interés en las últimas cuatro décadas, lo que ha significado un incremento en la cantidad de investigaciones donde el foco de atención es lo que el profesor conoce, piensa y actúa. Junto a este incremento del número de investigaciones también hallamos la aparición de numerosos trabajos con características cualitativas y enmarcados en un conocimiento del profesor contextualizado a las diferentes áreas académicas presentes en los sistemas educativos, entre esos resaltan los de la Educación Matemática. Ejemplo de ello es que desde el planteamiento realizado hace más de tres décadas por Shulman (1986) sobre la particularidad del conocimiento del profesor, se han planteado diferentes modelos que buscan representar ese conocimiento en el profesor de matemáticas, uno de ellos es el modelo MTSK que nos reúne en esta quinta edición del Congreso Iberoamericano sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.

Sin embargo, este creciente interés por estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas no ha sido uniforme en cuanto a los diferentes niveles educativos y modalidades de formación de profesores. La mayoría de las investigaciones han privilegiado los estudios dirigidos hacia los futuros profesores (formación inicial) y en

menor medida, hallamos investigaciones cuya población de estudio se enfoca en el profesor que ya ejerce su profesión (educación continua o desarrollo profesional) (Montes et al., 2021). Esta realidad nos motivó a investigar una experiencia donde profesores de primaria en ejercicio desarrollaban un proceso de formación en el que se estaba trabajando el tema de las fracciones. En esta presentación compartimos parte de los resultados de este estudio, en particular, mostramos el conocimiento del tema de las fracciones que este grupo de profesores manifestó en torno a la manera de iniciar a sus estudiantes en el conocimiento de las fracciones.

REFERENTES TEÓRICOS

El trabajo que presentamos considera al MTSK como su principal marco de referencia, en particular, en lo referido al “Conocimiento de los temas” (KoT), en este caso, referido el tema trata de las fracciones.

El KoT de acuerdo a Carrillo-Yañez et al. (2018), es el conocimiento que posee el profesor sobre los temas y la manera de enseñarlos. Eso supone, de parte del profesor, un conocimiento más profundo que el conocimiento que se espera adquieran sus estudiantes. En el caso de las fracciones no solo bastaría que el profesor conociera sus significados de acuerdo a sus diferentes representaciones, también es necesario que conozca sus aplicaciones, la razón por la cual se operan de una manera, los diferentes procesos para su operacionalización, entre otros aspectos. En el KoT se distinguen cuatro categorías, estas son, la fenomenología y aplicaciones; los procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos y, los diferentes registros de representación (Montes et al., 2019; Carrillo-Yañez et al., 2018; Vasco et al., 2017).

Muñoz-Catalán et al. (2015) abordaron el estudio del KoT analizando el conocimiento de un profesor en torno a las fracciones y sus operaciones, específicamente la división como medida, empleando las representaciones gráficas como soporte para la resolución de problemas. En la investigación se indica la importancia de la definición de la unidad en el concepto de fracción y algunas limitaciones de la noción de fracciones como parte/todo, la cual, constituye la noción más empleada y en varias ocasiones la única trabajada. Por otra parte Liñán et al. (2016) trabajaron el KoT sobre las fracciones y señalan que no debe estar restringido sobre la definición del concepto, tal y como deseamos mostrar en este estudio sino que se requiere conocer sobre los algoritmos de las operaciones, los fenómenos asociados y el conocimiento de las diferentes interpretaciones (parte-todo, medida, razón, cociente y operador), pues favorece a la utilización de diversas maneras de representar una fracción y los contextos asociados a esta.

Las fracciones representan un tema complejo por los diferentes significados inmiscuidos, situación que propicia dificultades en su enseñanza y aprendizaje (Reyes & Sosa, 2016). Sin embargo, los docentes, con la intención de establecer entre sus estudiantes las primeras vías de acceso a la fracción, en su mayoría enfatizan en la noción de este concepto partiendo del enfoque parte-todo, ejemplificando a partir de la equipartición de figuras planas circulares y rectangulares. Esta tendencia a iniciar el estudio de las fracciones representándolas como parte-todo es posible que se deba a que entre los profesores esta concepción de fracción está muy arraigada; así lo demuestran diversos estudios realizados en diferentes contextos con profesores en formación y profesores en ejercicio. Valenzuela-Molina et al. (2018) en Argentina y Reeder & Utley (2017) en los EE. UU. investigaron en futuros profesores el significado que tenían en relación a las fracciones y en ambos estudios coinciden en que la fracción es identificada mayoritariamente como la división en partes iguales de una unidad (parte – todo). De

igual manera Rau & Mattheus (2017) en un estudio, esta vez realizado con profesores de primaria en ejercicio en Turquía, llegan a las mismas conclusiones.

La introducción de este concepto desde la perspectiva parte – todo se apoya en el supuesto de que las actividades propias de este enfoque resultan ser más cercanas para los estudiantes (uso de material concreto, representación figural); además que les permite identificar sus elementos, numerador y denominador, por medio de un esquema ya establecido, el esquema de conteo. Por otro lado, también permite el uso de sistemas de representación como el verbal (lectura de fracciones) y el simbólico (expresión numérica asociada a una fracción). Así que, en la práctica, la conceptualización de la fracción se inicia desde “una situación de reparto equitativo, empleando material concreto que facilita la obtención de trozos o partes de objetos. Conjuntamente, se fortalece la lectura de diversas fracciones previamente a la introducción de la representación simbólica” (Rojas et al., 2013, p.61). A pesar de las bondades que pudiera ofrecer el enfoque parte-todo, privilegiarlo pondría en riesgo la conceptualización de la fracción desde otras interpretaciones (cociente, operador, razón y medida), dejando una falsa idea de comprensión. Cortina et al. (2013), identifican tres imágenes que los estudiantes pueden adquirir de la fracción desde la equipartición y que se muestran como obstáculos didácticos, comprometiendo la concepción de la fracción como número. Las imágenes identificadas son: la fracción como resultado de transformar un objeto, la fracción como tantos de tantos y la fracción como incluida en un entero. El obstáculo se presenta cuando el estudiante asume que las fracciones modifican irreversiblemente un objeto, de allí que no lleguen a comprender relaciones recíprocas como que sumar n veces la fracción unitaria $1/n$ produce el entero 1. Los estudiantes también podrían conceptualizar a las fracciones como números que cuantifican conjuntos de elementos discretos, generando de este modo un tratamiento de lo continuo de la misma forma como trata lo discreto. Por ejemplo, si se trata de un círculo dividido en 3 sectores circulares, no necesariamente de igual área, de los cuales están sombreados dos de ellos, la estrategia del estudiante será contar en cuántas partes se dividió el círculo y cuántas de ellas están sombreadas sin tener en consideración la conservación del área y asumiendo la representación simbólica fraccional como un par de números naturales, uno sobre otro separado por una pequeña “rayita”, $2/3$ para el ejemplo citado, perdiéndose la relación entre sus partes y pudiéndose llegar a la idea de que las fracciones no deben superar a la unidad o todo. El privilegiar esta interpretación de la fracción solo para identificar numerador y denominador resulta ser una práctica didáctica frágil si lo que se desea es una conceptualización robusta.

METODOLOGÍA

La investigación es de carácter cualitativo de tipo naturalista porque los hechos se estudian tal y como sucedieron en la realidad (Flick, 2015) y el enfoque es interpretativo porque se identifican, analizan e interpretan las diferentes manifestaciones del conocimiento que en él surgen sobre las fracciones (KoT) durante el episodio estudiado. Para conservar su anonimato los actores se identifican como M_i , donde $i=2,3, \dots$

Para el análisis nos apoyamos en cuatro categorías propuestas por Montes et al. (2019), Carrillo-Yañez et al. (2018) y Vasco et al. (2017), estas son *registros de representación* (posibles maneras de representar el tema de las fracciones) *fenomenologías y aplicaciones* (conocimiento de fenómenos o aplicaciones asociadas al tema de las fracciones), *procedimientos* (¿cuándo? ¿cómo y por qué se hace?, características de los resultados). Por último, *definiciones, propiedades y sus fundamentos* (descripción y caracterización del concepto y propiedades de las fracciones).

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El conocimiento de los temas (KoT) se entiende como el conocimiento que posee un docente de matemática sobre el uso y aplicaciones que tienen los contenidos, en este caso, el de las fracciones y está constituido por las categorías mencionadas anteriormente.

Registro de representaciones

Con la idea de plantear a los participantes la manera cómo se debe iniciar a los estudiantes en la noción de fracción, comienza un intercambio de ideas entre ellos y sale a relucir una intervención de M1 quien aboga por el uso de material concreto, en este caso, una hoja de papel (representación de tipo material). M1 expresa:

“Si los niños no dominan la parte de las líneas, los segmentos, las diagonales, todo eso, yo acostumbro a tomar una hoja, dibujo el rectángulo. ¡Ajá, vamos conmigo! (invita a los demás compañeros a que vean cómo lo hace mostrando una hoja de papel y ejemplificando de forma ostensiva). Vamos partiendo [mientras dobla a la mitad una hoja de papel] y vamos trazando y ellos van observando a medida que uno va haciendo los dobleces. ¿En cuántas partes lo hemos partido? ¿Cómo nos va quedando? Así vamos sucesivamente hasta obtener las divisiones que se puedan obtener en ese rectángulo”

M1 percibe que cuando los estudiantes se inician en Educación Primaria presentan limitaciones en el dominio de representaciones de tipo figural; ese vacío es el que justifica la introducción del concepto de fracción con una estrategia que resulte ser más cercana y “manipulable” para los estudiantes, usando material concreto. Esta estrategia parece que genera conexiones entre lo concreto (hoja de papel con dobleces) y lo abstracto (concepto de fracción como parte-todo, lectura y representación simbólica de la fracción). En la práctica, la conceptualización de la fracción se inicia desde “una situación de reparto equitativo, empleado material concreto que facilita la obtención de trozos o partes de objetos. Conjuntamente, se fortalece la lectura de diversas fracciones previamente a la introducción de la representación simbólica” (Rojas et al., 2013, p.61).

M1 continúa y expresa:

“...porque entonces caen los niños en un error que a veces quieren utilizar una circunferencia y dividirla en cinco. ¡No se puede dividir en 5 porque no tiene 5 partes iguales!”. En ese momento el formador cuestiona la respuesta y añade: “¿Por qué la tendencia [de los estudiantes] a irse a un cuarto, a un medio en un círculo? ¿Por qué será? ¿Es un problema de madurez mental o hay otras razones?”

Respondiendo a las preguntas planteadas interviene M2 y dice: “Porque para nosotros [los profesores] es más fácil enseñar a dividir [el círculo] en pares. ¡Vamos a dividir en un cuarto! ¡Vamos a tomar dos cuartos! Siempre los enseñamos a dividir en pares”.

En el estudio de las fracciones existe una fuente y un objetivo: la fuente es la representación figural externa, mientras que el objetivo es el concepto de fracción asociado a la fuente (Tunç-Pekkan, 2015). Según lo expresado por M1 un círculo (la fuente) presenta la limitación de no permitir representar fracciones con denominador impar: un quinto, dos quintos, ..., cinco quintos (el objetivo), algo que es reforzado por M2. Parece que los profesores tienden a privilegiar las fracciones con denominador par en el caso de las figuras circulares, derivado de la acción de doblar la hoja por la mitad repetidamente, acción que usualmente ejecutan al introducir la noción de este concepto mediante el uso de material concreto, dejando entrever que en este caso (denominador impar), el rectángulo es la figura adecuada a presentar a sus estudiantes.

Podría decirse que hay una creencia de que las fracciones tienen asociadas ciertas figuras geométricas que permiten su representación y que es necesario diferenciar entre el uso de fuentes dependiendo del número de partes, pares o impares, en las que se divide el todo. Si el número de partes en las que se divide el todo es impar, entonces su representación figurada será un rectángulo, pero si el número de partes es par, se podría usar un círculo. Es importante hacer notar que dentro de las representaciones figuradas no se presentó la recta numérica.

Fenomenología y aplicaciones

Respecto a esta categoría M1 colocó como ejemplo de aplicación lo siguiente: “Lo digo por experiencia, yo a veces les digo: miren mis hijos si yo tengo una torta y la divido en 2, esa fracción representa un medio”. El ejemplo presentado por M1 generó un intercambio de ideas, una de ellas fue planteada por M3 quien señala que:

“normalmente, cuando se va a dar fracciones, lo he visto en textos y también en muchos compañeros [colegas profesores] que no salen de la torta, no salen de una pizza, no salen de algo que sea circular, cuando podemos dar otros ejemplos”

Entre estas dos intervenciones de M1 y M3 se evidencia que M1 asume la clásica utilización de la torta para contextualizar el concepto de fracción. Este ejemplo es clásico, no solo por lo que expresa M3, también es algo que otras investigaciones al respecto señalan (Ríos, 2019). Esta tendencia a privilegiar estos ejemplos de aplicación de la fracción es coherente con la idea de solo presentar a la fracción como parte-todo y nos lleva a lo que Freudenthal (1983) denominaba como “pobreza fenomenológica” que, en el caso de las fracciones, produce experiencias muy limitadas para la comprensión de lo que es este concepto ya que no se presentan otros casos donde las fracciones se apliquen.

Procedimientos

El ámbito de los procedimientos hace referencia al conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos, el cómo se hace o se emplea (Liñan et al., 2016), en este caso se evidencia cuando se indica la manera de representar una fracción bien sea con material concreto o mediante un gráfico, en ese sentido M1 manifiesta:

“... si los niños no dominan la parte de las líneas, los segmentos, las diagonales, todo eso, yo suelo tomar una hoja, dibujo el rectángulo. ¡Ajá, vamos conmigo! (mostrando una hoja de papel). Vamos partiendo [mientras dobla a la mitad una hoja de papel] y vamos trazando y ellos van observando a medida que uno va haciendo los dobleces. ¿En cuántas partes lo hemos partido? ¿Cómo nos va quedando? Así vamos sucesivamente hasta obtener las divisiones que se puedan obtener en ese rectángulo y luego los mandamos a colorear...”

Se puede notar en M1 que el proceso a seguir para mostrar lo que es una fracción consiste en plasmar y/o exhibir una figura, dividirla en porciones iguales y ver la cantidad de “divisiones” que conforman la totalidad. Según M1 se puede introducir la fracción de esta manera puesto que, si los estudiantes desconocen algunos de los términos asociados a otras representaciones de fracciones, probablemente comprenderían las partes de una fracción dentro del concepto parte – todo. Lo anterior atiende al cómo, cuándo y por qué se hace (Vasco et al., 2017). Por su parte M4 plantea otro modo de representar la fracción, en este caso cuando se trata de una figura circular, indicando que:

“... Uno divide el diámetro [haciendo un gesto con las manos, indicando de cierto modo que se emplee el radio] y lo va dividiendo, o sea, sí lo puedes dividir en 5

partes, en partes iguales. Van a medir lo mismo, tú puedes dividir las 5 partes y que midan todo lo mismo, que el arco sea el mismo”

En su comentario M4 presenta algunas inconsistencias, sin embargo, al final, cuando menciona los arcos de una circunferencia se intuye el cómo debe hacerse cuando se desea representar una fracción con denominador impar en un círculo, respondiendo y refutando a lo manifestado por M1 quien daba a entender que en el caso de una fracción $1/n$, donde n es un entero positivo impar no se podía representar mediante esta figura.

Definiciones, propiedades y fundamentos

En este caso, se revela el predominio de un significado de la fracción como parte-todo, lo cual puede ser empleado como “base para instaurar los diferentes sub-constructos” (Real et al., 2013, p. 22). Sin embargo, Ávila (2019) señala que la intención debería enfocarse en asociar las expresiones “ a/b ” con objetos/ acciones en cualquiera de los conceptos, brindando mayor apertura a otros significados como medida, razón, cociente y operador.

En ese sentido M1 al hacer referencia a la definición de fracción señala:

“...que quede claro algo, que el niño esté consciente de que la fracción es una parte entera dividida en otras, o sea, es cuando se le da la diferencia de lo que es un numerador y un denominador... Yo dividí la hoja en tres partes y allí represento una fracción, ¿cuál es? ¡un tercio! Claro, porque mi hoja la dividí en tres partes, pero las partes iguales”

En el caso de M1 se continúan reflejando el predominio de la fracción como parte-todo, algo que parece ser del consenso de los demás participantes porque no se escuchan voces disidentes. A partir de la equipartición de una figura plana rectangular se pretende identificar sus elementos, numerador y denominador, por medio del esquema de conteo. Esta acción de acuerdo a Rojas et al. (2013) podrían facilitar el acceso a la lectura y simbología de las fracciones; sin embargo, este énfasis en ver la fracción solo como parte-todo no contribuye al enriquecimiento de este complejo concepto.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Nuestro interés por identificar, analizar e interpretar los conocimientos emergentes que estuvieron presentes en profesores de primaria participantes de un programa de formación permitieron reconocer un predominio del concepto de fracción como parte – todo a lo largo del episodio. Esta manera de ver la iniciación al concepto de fracción liderada por M1 fue de alguna manera avalada por sus compañeros, cuando a lo largo de sus intervenciones nunca cuestionaron o propusieron alternativas diferentes. Estos resultados coinciden con las investigaciones realizadas por Valenzuela-Molina et al. (2018), Reeder & Utley (2017) y Rau & Mattheus (2017) quienes, en diferentes contextos y actores, obtuvieron iguales conclusiones.

De igual manera también observamos una tendencia a privilegiar las fracciones unitarias ($1/n$, donde $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$) y, en el contexto de este tipo de fracciones, los profesores parecieron asociar dos tipos de figuras, dependiendo de si el denominador era par o impar. La tendencia a asociar las representaciones figurales continuas circulares con fracciones unitarias con denominador par fue bastante marcada y, en el caso del denominador impar, las representaciones figurales rectangulares parecieran ser las preferidas.

Respecto a los procedimientos, solo se evidenció a través del uso de materiales concretos, específicamente a las diferentes figuras que pudieran ser representadas en papel o en la pizarra (tablero); sin embargo, somos conscientes que alrededor de las fracciones existen

muchos otros modos de proceder diferentes a los utilizados, incluyendo, obviamente, los procedimientos propios de los matemáticos.

Por último, en cuanto a la fenomenología, solo se asoció el concepto de fracción al clásico ejemplo de la torta. Esto evidencia una limitante que preocupa y que muestra un empobrecimiento de experiencias diferentes, tal y como lo señalaba Freudenthal, (1983) y que se repite en diferentes investigaciones realizadas al respecto (Ríos, 2019).

Este conjunto de resultados nos lleva a replantearnos a futuro los énfasis a trabajar sobre las fracciones como un tema que supere la limitada visión de parte – todo. Las otras diferentes maneras de abordar las fracciones como operador, cociente, razón o medida deberán ser trabajadas tanto en sus diferentes formas de representación, como en su fenomenología, procedimientos y definiciones. Los retos por superar el predominio de la fracción como parte – todo nos obliga como formadores a plantearnos estas nuevas tareas.

Referencias

- Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje : las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 22–60. <https://doi.org/10.24844/EM3102.02>
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á. M. R., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher ' s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 1–18. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Cortina, J. L., Zúñiga, C., & Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25(2), 7–29. <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v25n2/v25n2a2.pdf>
- Doğan, A., & Işık Tertemiz, N. (2020). Fraction models used by primary school teachers. *İlköğretim Online*, 1888–1901. <https://doi.org/https://doi.org/10.17051/ilkonline.2020.762538>
- Flick, U. (2015). *El diseño de investigación cualitativa*. Ediciones Morata, S.L.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Company, Reidel Publishing.
- Liñán, M. ., Contreras, L. ., & Barrera, V. J. (2016). Conocimiento de los temas (koT). In J. Carrillo, L. . Contreras, & M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (Issue July, pp. 12–20). SGSE: Huelva. https://www.researchgate.net/publication/305205018_CONOCIMIENTO_DE_LOS_TEMAS_KOT
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., & Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. In E. Badillo Jiménez, N. Climent Rodríguez, C. Fernández Verdú, & M. T. González Astudillo (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 157–176). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca. https://www.researchgate.net/publication/341050692_ESTRUCTURANDO_LA_FORMACION_INICIAL_DE_PROFESORES_DE_MATEMATICAS_UNA_PROPOSTA_DES_DE_EL_MODELO_MTSK
- Montes, M., Pascual, M., & Climent, N. (2021). Una aproximación a la formación especializada en matemáticas de maestros egresados. *Revista Latinoamericana de Investigación En*

- Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M., & Climent, N. (2015). Educación Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas Introducción. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 18(3), 1801–1817. <http://hdl.handle.net/11441/51501%0A>
- Rau, M. A., & Matthews, P. G. (2017). How to make ‘more’ better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students’ learning about fractions. *ZDM Mathematics Education*, 49, 531–544. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0846-8>
- Real, R., Gómez, B., & Figueras, O. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza : El caso de un libro de texto. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 30(85), 21–36. https://www.researchgate.net/publication/341396664_Aspectos_de_la_fraccion_en_los_modelos_de_ensenanza_El_caso_de_un_libro_de_texto
- Reeder, S., & Utley, J. (2017). What Is a Fraction ? Developing Fraction Understanding in Prospective Elementary Teachers. *School Science and Mathematics*, 117(7–8), 307–316. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/ssm.12248>
- Reyes, A., & Sosa, L. (2016). Caracterización del conocimiento especializado del profesor en formación inicial para enseñar la razón como un significado de la fracción. *Investigación e Innovación En Matemática Educativa*, 1(1), 75–83. <http://funes.uniandes.edu.co/15379/1/Reyes2016Caracterizacion.pdf>
- Ríos, Y. (2019). Diversas interpretaciones de las fracciones. In R. Flores, D. García, & I. E. Pérez-Vera (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 32, pp. 141–150). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. <http://funes.uniandes.edu.co/14018/1/Rios2019Diversas.pdf>
- Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 4, 47–64. https://www.researchgate.net/publication/334238355_Caracterizacion_del_conocimiento_matematico_para_la_ensenanza_de_los_numeros_racionales
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. https://depts.washington.edu/comgrnd/ccli/papers/shulman_ThoseWhoUnderstandKnowledgeGrowthTeaching_1986-jy.pdf
- Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children ’ s fractional knowledge depicted with circle , rectangle , and number line representations knowledge depicted with circle , rectangle , and number. *Educational Studies in Mathematics*, 89(May), 419–441. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9606-2>
- Valenzuela-Molina, M., Ramos, E., Reyes, P., & Rodríguez, P. (2018). Nociones básicas sobre fracción que manifiestan futuros profesores de enseñanza básica. *Actas de La XII Conferencia Argentina de Educación Matemática*, 19–28. <http://funes.uniandes.edu.co/19642/>
- Vasco, D., Moriel, J. J., & Contreras, L. . (2017). Subdominios del mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK). In J. Carrillo-Yáñez & L. . Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de la III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 29–37). Huelva: CGSE. https://www.researchgate.net/publication/326479672_The_mathematics_teacher’s_specialised_knowledge_MTSK_model